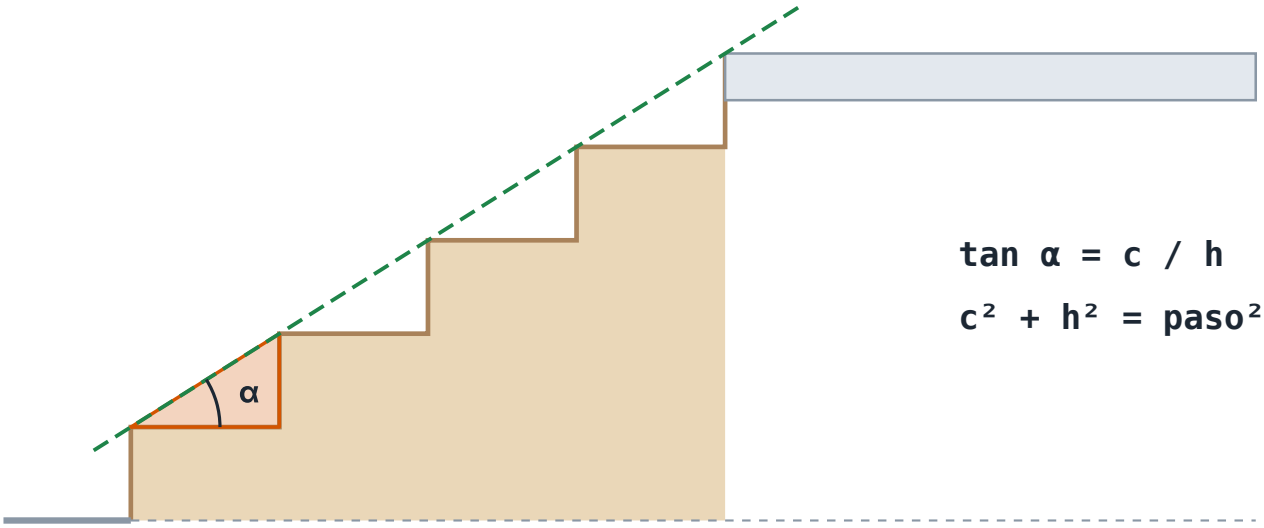
CARPINTERÍA Y MUEBLE · APUNTES PARA EL ALUMNADO

Matemáticas para la madera

Pitágoras y trigonometría en el taller: cómo sacar medidas y ángulos de una pieza con la calculadora, sin abrir el CAD



Matemáticas para la madera · 2026.11 · © 2026 Eloi A.A.
Apuntes publicados con licencia CC BY-SA 4.0.

Índice

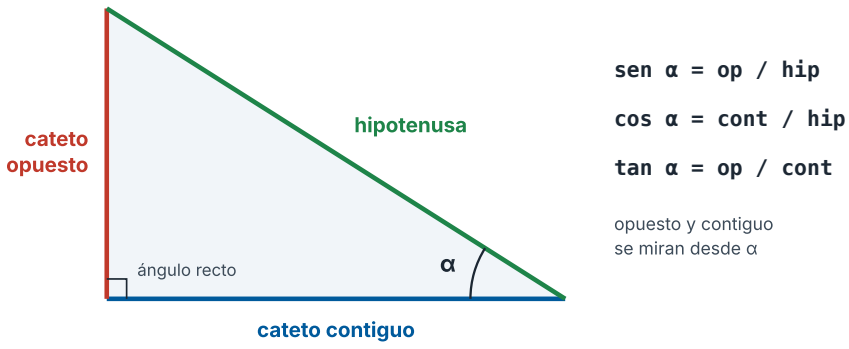
1. Antes de empezar 3
2. Pitágoras en el taller 4
3. Trigonometría: ángulos y lados 8
4. Escaleras 11
5. Ingletes y polígonos 13
6. Arcos: cuerda, flecha y radio 16
7. El radio de una esquina redondeada 18
8. Repartos y proporciones 21
9. Del taller a la CNC 23
10. Cubiertas y cerchas 24
11. Ingletes compuestos 27
12. Arcos de carpintería 29
13. Escaleras de caracol 34
14. Cubicación y presupuesto 35
15. Proyecto: un banco de jardín 37
E · Errores típicos 40
F · Formulario 41
S · Soluciones 43

1 Antes de empezar

Para sacar la medida de una pieza no siempre hace falta dibujarla en el CAD. Casi todas las cotas y ángulos que buscamos en el taller salen de un **triángulo rectángulo**: la diagonal de un armazón, el largo de un jabalcón, el ángulo de una pata abierta, el paso de una escalera... Con **Pitágoras** y tres teclas de la calculadora (`sin`, `cos`, `tan`) se resuelven en un minuto.

El triángulo rectángulo

Tiene un ángulo de 90°. Los dos lados que forman ese ángulo son los **catetos**; el lado de enfrente, el más largo, es la **hipotenusa**. Cuando trabajamos con un ángulo α, los catetos se nombran según dónde están respecto a él: el **opuesto** está enfrente de α y el **contiguo** lo toca.



Los tres lados del triángulo rectángulo, vistos desde el ángulo α.

La calculadora

Tecla	Para qué	Ejemplo
`x²` y `√`	Pitágoras: elevar al cuadrado y sacar la raíz	`√(60² + 80²) = 100`
`sin` `cos` `tan`	De un ángulo a una relación entre lados	`tan 45° = 1`
`sin⁻¹` `cos⁻¹` `tan⁻¹`	Al revés: de una relación entre lados al ángulo. Suelen ir con `SHIFT` o `2nd`	`tan⁻¹(1) = 45°`

> ⚠️ **Modo DEG.** En el taller los ángulos van en grados. Comprueba que en la pantalla pone **D** o **DEG**: en radianes (**R**, **RAD**) todos los resultados salen mal. Prueba rápida: `tan 45` tiene que dar **1**.

Decimales y redondeo

- Escribimos los decimales con **punto**, como en el G-code: 1341.6 mm.
- Haz las cuentas con todos los decimales de la calculadora y **redondea solo al final**: a la décima de milímetro y a la décima de grado. Si redondeas a mitad de cálculo, el error se acumula.
- En madera no se corta a la décima, pero la décima te sirve para comprobar el cálculo. Al marcar, redondea a lo que puedes medir (el medio milímetro o el milímetro).

> 📏 **¿Tiene sentido el resultado?** Antes de cortar, haz siempre dos comprobaciones: la **hipotenusa es el lado más largo**, pero más corta que la suma de los dos catetos; y los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo **suman 90°**.

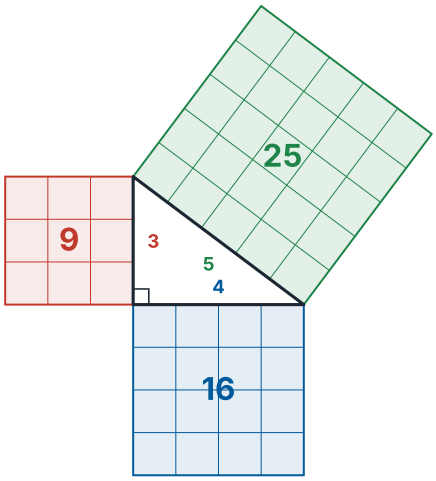
Los niveles de los ejercicios

Cada capítulo acaba con ejercicios de tres niveles: ● básico, ●● intermedio y ●●● avanzado. Las soluciones están al final de los apuntes, paso a paso. Para practicar con ejercicios nuevos tienes el programa **Matemáticas para la madera**: te propone ejercicios al azar, con dibujo, y comprueba tu resultado.

2 Pitágoras en el taller

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Con catetos **a** y **b** e hipotenusa **c**:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



$3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$

El triángulo 3 – 4 – 5: los cuadrados de los catetos (9 y 16 cuadritos) suman el cuadrado de la hipotenusa (25).

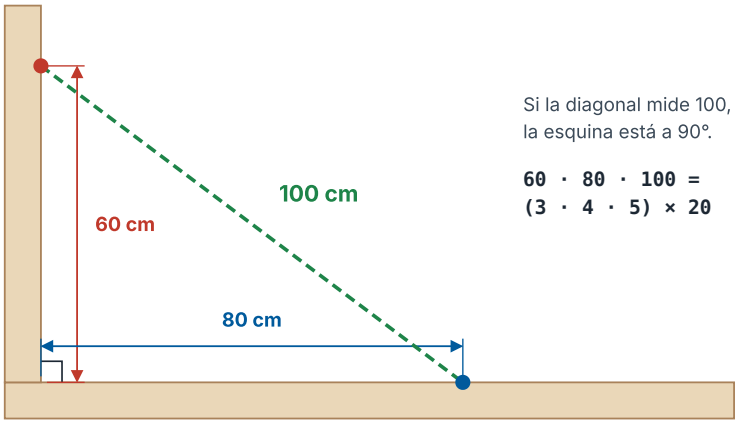
Según lo que busques, despeja:

Buscas	Fórmula	Cómo se dice
La hipotenusa	`c = √(a² + b²)`	Suma los cuadrados y saca la raíz
Un cateto	`a = √(c² − b²)`	Al cuadrado de la hipotenusa le **restas** el del otro cateto

> ⚠️ **El error más común.** √(a² + b²) **no** es a + b. √(60² + 80²) = √10000 = 100, no 140.

2.1 Escuadrar con el 3 – 4 – 5

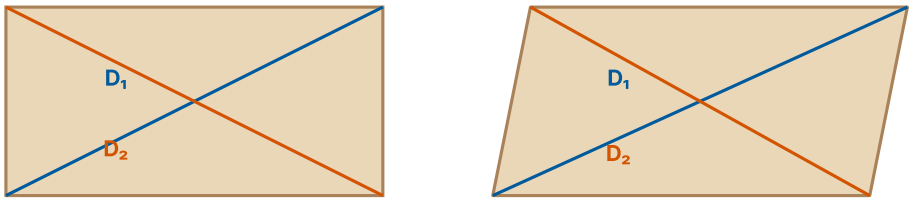
Para comprobar que una esquina grande está a 90° (un bastidor, el replanteo de un mueble en obra) no hace falta escuadra. Mide 3 unidades por un lado y 4 por el otro: si la distancia entre las dos marcas es 5, la esquina está a escuadra. Sirve cualquier múltiplo: **30 – 40 – 50**, **60 – 80 – 100**, **90 – 120 – 150** cm. Cuanto más grande, más precisa la comprobación.



Esquina a escuadra: 60 cm por un lado, 80 cm por el otro y 100 cm de diagonal.

2.2 Las diagonales de un armazón

Un rectángulo tiene las **dos diagonales iguales**. Si al encolar un armazón o un cajón miden distinto, está descuadrado: se aprieta con el sargento en diagonal, por las esquinas de la diagonal más larga, hasta que midan lo mismo.



$D_1 = D_2$ → **a escuadra** | $D_1 \neq D_2$ → **descuadrado** (empuja por las esquinas de la diagonal larga)

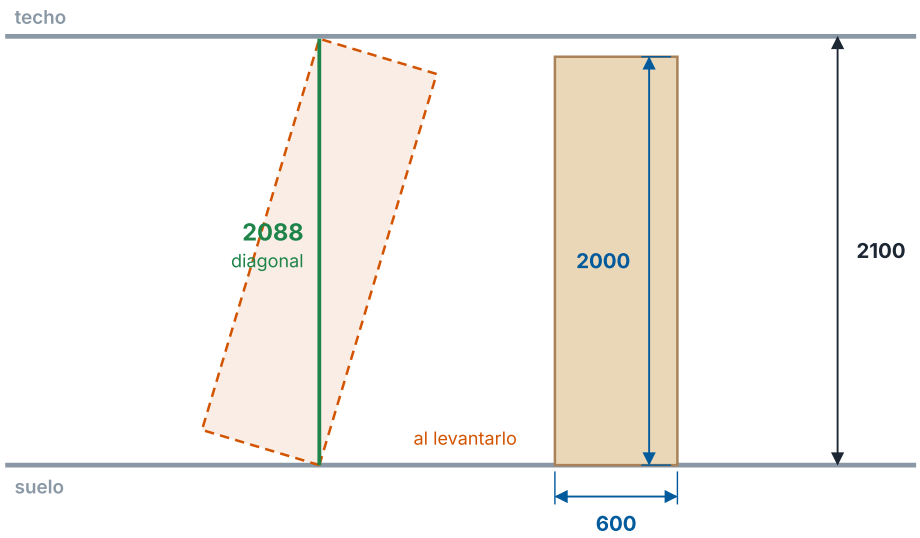
Armazón a escuadra (diagonales iguales) y descuadrado (una diagonal más larga).

Con Pitágoras sabes además **cuánto** tienen que medir. Para un armazón de 1200 × 600:

```
D = √(1200² + 600²) = √(1 440 000 + 360 000) = √1 800 000 = 1341.6 mm
```

2.3 ¿Cabe? La diagonal del mueble

Un armario se monta tumbado en el suelo y luego se levanta. Al girarlo, la esquina de arriba describe un arco cuyo radio es la **diagonal del costado**, no la altura. Para un armario de 2000 de alto y 600 de fondo, en una habitación de 2100 de techo:



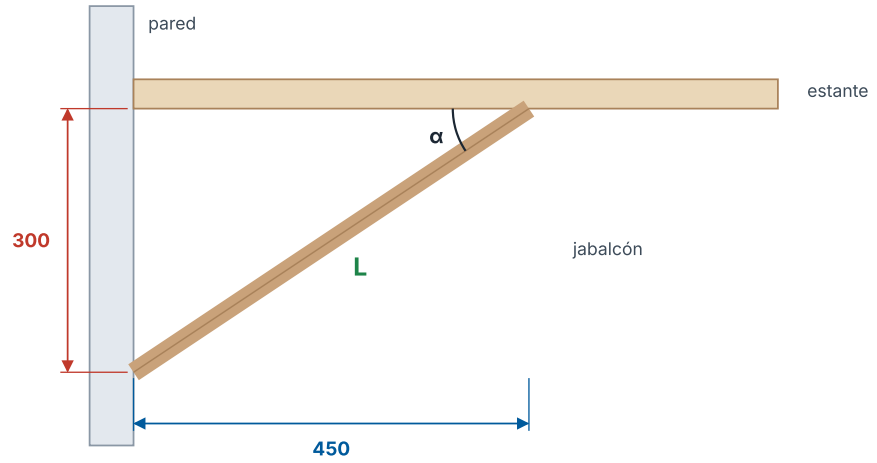
Al levantar el armario, lo que tiene que caber bajo el techo es la diagonal del costado.

```
D = √(2000² + 600²) = √4 360 000 = 2088.1 mm
2088.1 < 2100  →  cabe, con 11.9 mm de holgura
```

La misma cuenta sirve para saber si un tablero pasa por una puerta o si un mueble gira en un pasillo.

2.4 Piezas inclinadas

Un jabalcón (la pieza en diagonal que sujeta un estante o un banco) une un punto de la pared con otro del estante. Si va 300 mm por debajo del estante y lo toca a 450 mm de la pared:



Jabalcón: los catetos son las distancias por la pared y por el estante; la pieza es la hipotenusa.

$$L = \sqrt{(450^2 + 300^2)} = \sqrt{(202\,500 + 90\,000)} = \sqrt{292\,500} = 540.8 \text{ mm}$$

Es el largo por el canto, de punta a punta. El ángulo de los cortes lo sacamos en el capítulo siguiente.

Ahora tú

2.1 ● Vas a escuadrar un bastidor marcando **90 cm** por un lado y **120 cm** por el otro. ¿Cuánto tiene que medir la diagonal entre las dos marcas?

2.2 ● ¿Cuánto mide la diagonal de un tablero de **1830 × 600** mm?

2.3 ●● La diagonal de un marco rectangular mide **1000** mm y uno de sus lados **800** mm. ¿Cuánto mide el otro lado?

2.4 ●● Un armario de **2100** de alto y **580** de fondo se monta tumbado en una habitación de **2150** de techo. ¿Se puede levantar? Si no, ¿qué fondo máximo podría tener?

2.5 ●●● Un tejadillo a dos aguas tiene **2400** mm de luz (de pared a pared) y la cumbrera está **600** mm por encima de los apoyos. Cada par va de la cumbrera a la pared y sobresale un **vuelo de 300** mm medidos en horizontal. ¿Qué largo tiene cada par?

3 Trigonometría: ángulos y lados

Pitágoras relaciona los tres lados. Cuando aparece un **ángulo** (el de un corte, el de una pendiente) usamos el seno, el coseno o la tangente. Cada una es una división entre dos lados del triángulo:

$$\text{sen } \alpha = \text{opuesto} / \text{hipotenusa}$$

$$\cos \alpha = \text{contiguo} / \text{hipotenusa}$$

$$\tan \alpha = \text{opuesto} / \text{contiguo}$$

> 💡 **Para recordarlo: SOH – CAH – TOA.** **S**eno = **O**puesto / **H**ipotenusa · **C**oseno = **A**dyacente (contiguo) / **H**ipotenusa · **T**angente = **O**puesto / **A**dyacente.

Qué función usar

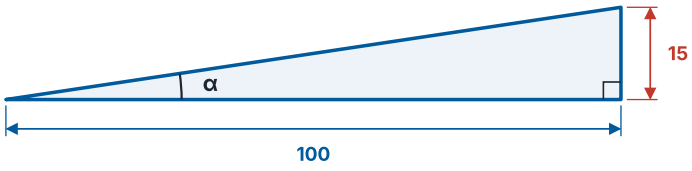
Mira qué dos lados intervienen: los dos que conoces, o el que conoces y el que buscas.

Intervienen	Función	Para el lado	Para el ángulo
opuesto e hipotenusa	**seno**	$\text{op} = \text{hip} \cdot \text{sen}\,\alpha$	$\alpha = \text{sen}^{-1}(\text{op} / \text{hip})$
contiguo e hipotenusa	**coseno**	$\text{cont} = \text{hip} \cdot \cos\alpha$	$\alpha = \cos^{-1}(\text{cont} / \text{hip})$
opuesto y contiguo	**tangente**	$\text{op} = \text{cont} \cdot \tan\alpha$	$\alpha = \tan^{-1}(\text{op} / \text{cont})$

En el taller, la más útil es la **tangente**: casi siempre conocemos los dos catetos (cuánto avanza y cuánto sube una pieza) y buscamos el ángulo.

3.1 Pendiente en % y en grados

La pendiente es cuánto sube por cada cien que avanza: es la tangente del ángulo, multiplicada por 100.



`pendiente = 15 / 100 = 15 %  α = tan⁻¹ 0.15 = 8.5°`

Una rampa que sube 15 en 100 tiene una pendiente del 15 % y un ángulo de 8.5°.

Pendiente	5 %	10 %	1:8 (12.5 %)	1:6 (16.7 %)	50 %	100 %
Ángulo	2.9°	5.7°	7.1°	9.5°	26.6°	45°

> ⚠️ **100 % no es 90°.** Una pendiente del 100 % sube lo mismo que avanza: es 45°. Una pared vertical tendría pendiente infinita.

3.2 El ángulo de corte de una pieza inclinada

Volvemos al jabalcón del capítulo 2 (450 por el estante, 300 por la pared). El ángulo con el estante, α, tiene 300 como cateto opuesto y 450 como contiguo:

`tan α = 300 / 450 = 0.6667` `α = tan⁻¹ 0.6667 =` **`33.7°`**

El corte de arriba va a 33.7° y el de abajo, contra la pared, a 56.3° (los dos ángulos agudos suman 90°).

3.3 Patas abiertas

Una mesa de 700 de alto con las patas abiertas 80 mm hacia fuera en el suelo. ¿A qué ángulo cortamos las patas y qué largo tienen?



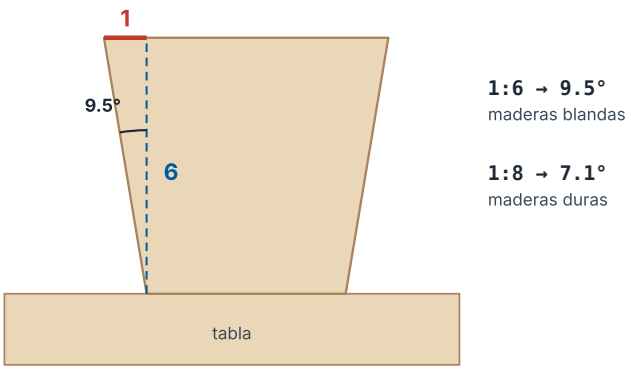
Pata abierta: 700 de altura y 80 de vuelo. El ángulo α se mide desde la vertical.

$$\tan \alpha = 80 / 700 = 0.1143 \qquad \alpha = \mathbf{6.5°}$$
$$\text{largo} = \sqrt{(700^2 + 80^2)} = \mathbf{704.6\ mm}$$

Los cortes de arriba y de abajo van a 6.5°, paralelos entre sí, para que la pata apoye plana en el suelo y bajo el tablero.

3.4 Colas de milano

La inclinación de las colas se da como pendiente **1:6** (maderas blandas) o **1:8** (maderas duras): por cada 6 (u 8) de profundidad, la cola se abre 1 por cada lado.



Cola de milano 1:6: por cada 6 de profundidad, se abre 1 por cada lado.

$$1{:}6 \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1 / 6) = \mathbf{9.5°} \qquad 1{:}8 \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1 / 8) = \mathbf{7.1°}$$

Con una tabla de 20 mm de grueso, cada lado de la cola se abre 20 / 6 = 3.33 mm en pendiente 1:6.

Ahora tú

3.1 ● ¿Cuántos grados son una pendiente **1:8**?

3.2 ● Una rampa avanza **1200** mm y sube **100** mm. ¿Qué pendiente tiene, en % y en grados?

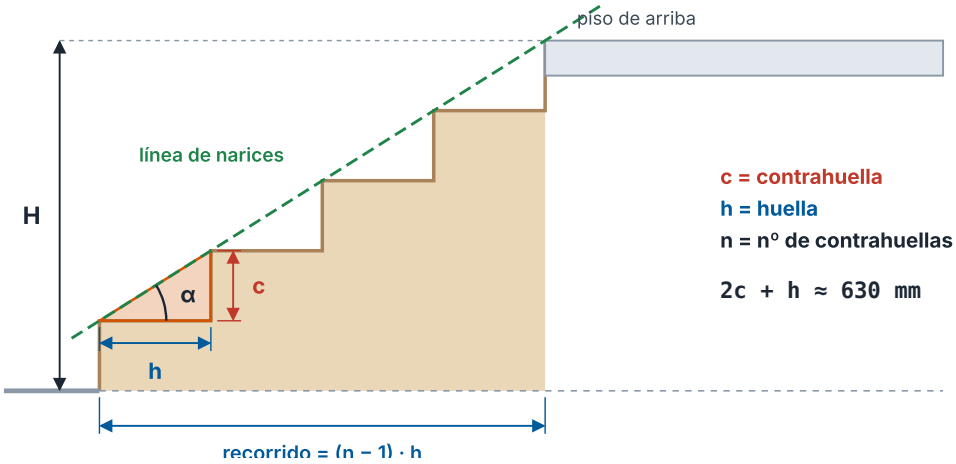
3.3 ●● Un tablero de **600** mm se apoya inclinado a **15°** sobre el suelo. ¿A qué altura llega y cuánto ocupa en el suelo (en horizontal)?

3.4 ●● Las patas de un taburete de **450** mm de alto se abren **60** mm hacia fuera. ¿A qué ángulo, respecto a la vertical, se cortan arriba y abajo? ¿Qué largo tienen?

3.5 ●●● El respaldo de un banco mide **900** mm y va inclinado **12°** respecto a la vertical. ¿Cuánto se retrasa la parte de arriba respecto a la de abajo? ¿Qué altura tiene el respaldo?

4 Escaleras

Una escalera es una fila de triángulos rectángulos iguales: cada peldaño tiene una **huella h** (donde se pisa) y una **contrahuella c** (lo que sube). Todo sale de ese triángulo.



Cada peldaño es un triángulo rectángulo de catetos h y c. La línea de narices une las puntas de los peldaños.

4.1 La regla de Blondel

Una escalera es cómoda cuando el paso de la persona coincide con dos contrahuellas y una huella:

$$2c + h \approx 630 \text{ mm} \quad \text{(entre 600 y 640)}$$

⚠️ **La norma.** El Código Técnico (CTE DB SUA) fija límites, por ejemplo una contrahuella de 130 a 185 mm y una huella de 280 mm como mínimo en escaleras de uso general, o hasta 200 y 220 mm en las de uso restringido (dentro de una vivienda). Antes de un proyecto real, consulta la versión vigente.

4.2 Calcular una escalera paso a paso

Altura entre pisos H = 2640 mm. Buscamos una contrahuella cercana a 175 mm:

1. **Número de contrahuellas.** Divide y redondea a un número entero.

```
2640 / 175 = 15.09  →  n = 15 contrahuellas
```

2. **Contrahuella exacta.** Todas iguales: reparte la altura.

```
c = 2640 / 15 = 176 mm
```

3. **Huella, con Blondel.**

```
h = 630 − 2 · 176 = 278  →  tomamos h = 280 mm
```

4. **Recorrido en planta.** La última contrahuella llega al piso de arriba, así que hay una huella menos que contrahuellas.

```
recorrido = (n − 1) · h = 14 · 280 = 3920 mm
```

5. **Ángulo de la escalera** (el de los cortes de la zanca):

```
α = tan⁻¹(c / h) = tan⁻¹(176 / 280) = 32.2°
```

6. **Largo por la línea de narices.** Cada peldaño mide en diagonal $\sqrt{(h^2 + c^2)}$:

```
paso = √(280² + 176²) = 330.7 mm      línea de narices = 14 · 330.7 =
4630.1 mm
```

📏 **Para el taller.** La zanca se marca con la escuadra de carpintero: apoyas h en una rama y c en la otra y repites el triángulo a lo largo de la tabla. La zanca real es algo más larga que la línea de narices: hay que sumar el arranque y la llegada.

Ahora tú

4.1 ● Una escalera salva **2550** mm con **15** contrahuellas. ¿Cuánto mide cada contrahuella? ¿Qué huella da la regla de Blondel?

4.2 ●● Calcula una escalera para **2800** mm de altura con contrahuellas de unos 175 mm: número de contrahuellas, c, h, recorrido y ángulo.

4.3 ●● Los peldaños de una escalera tienen **c = 180** y **h = 250**. ¿Qué ángulo tiene la escalera? ¿Cuánto mide cada peldaño en diagonal?

4.4 ●●● Hay que salvar **2700** mm y solo hay **3600** mm de recorrido en planta. Prueba con 15 y con 14 contrahuellas (huella por Blondel). ¿Cuál cabe? ¿Cumple para una vivienda?

5 Ingletes y polígonos

5.1 El ángulo de corte de un marco

Al recorrer un marco cerrado se da una vuelta completa, 360°. En un marco regular de **n** lados, cada unión gira 360° / n, y ese giro se reparte entre las dos piezas. El ángulo que marcas en la ingletadora (desde el corte a escuadra) es:

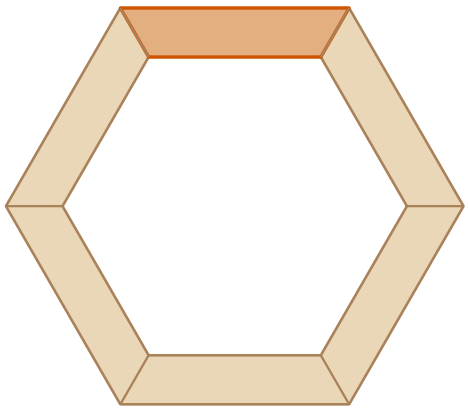
```
corte = 180° / n
```

Lados	3	4	5	6	8	10	12
Corte	60°	45°	36°	30°	22.5°	18°	15°

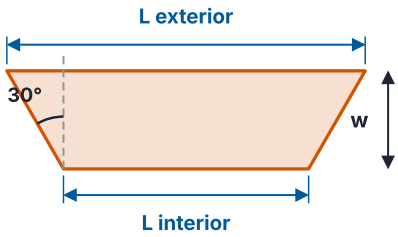
Si las piezas se encuentran en una esquina cualquiera de **β** grados (un rodapié en un rincón que no es de 90°), cada pieza se corta a **(180° – β) / 2**. Con β = 90° sale 45°, como siempre.

5.2 Largo interior y largo exterior

El canto de dentro y el de fuera de cada pieza no miden lo mismo. Cada inglete añade, en el canto de fuera, el ancho del listón por la tangente del corte:



6 lados → 180° / 6 = 30°



L ext = L int + 2 · w · tan 30°

Marco hexagonal: corte a 30°. Cada extremo de la pieza añade w · tan 30° en el canto de fuera.

$$L_{exterior} = L_{interior} + 2 \cdot w \cdot \tan(\text{corte})$$

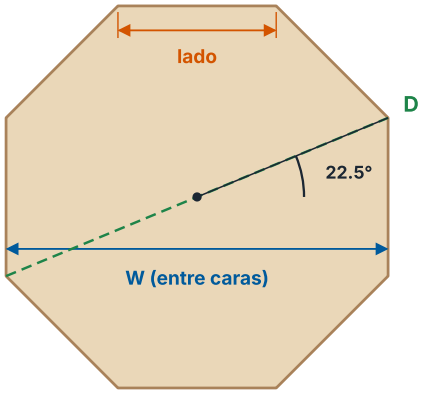
En un marco cuadrado, tan 45° = 1: el exterior es el interior más dos veces el ancho. Un espejo de **500 × 700** con listón de **50** necesita piezas de **600** y **800** por fuera.

Un marco hexagonal de 300 de lado interior con listón de 40:

$$L_{ext} = 300 + 2 \cdot 40 \cdot \tan 30° = 300 + 80 \cdot 0.5774 = \mathbf{346.2\ mm}$$

5.3 Polígonos a partir de la medida entre caras

Para una mesa octogonal o un tablero hexagonal, lo que se suele conocer es el ancho entre dos caras paralelas, **W**. El lado y la medida entre vértices (para saber de qué tablero partimos) salen con la mitad del ángulo central, 180° / n:



`lado = W · tan 22.5°`

`D = W / cos 22.5°`

22.5° = 180° / 8

Octógono de ancho W entre caras: el lado es W · tan 22.5° y la medida entre vértices, D = W / cos 22.5°.

Mesa octogonal de **1200** entre caras:

```
lado = 1200 · tan 22.5° = 497.1 mm
entre vértices = 1200 / cos 22.5° = 1298.9 mm
```

Ahora tú

5.1 ● ¿A qué ángulo se cortan las piezas de un marco **pentagonal**?

5.2 ● Un cuadro de **400 × 300** mm (por dentro) lleva un marco de listón de **45** mm. ¿Qué largo exterior tienen las piezas?

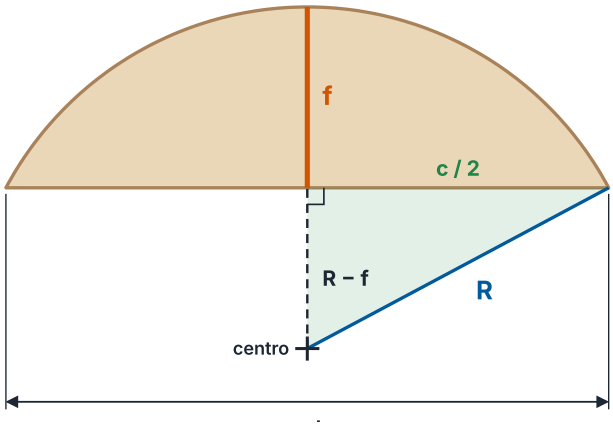
5.3 ●● Un marco hexagonal tiene **250** mm de lado interior y listón de **60** mm. ¿Qué largo exterior tiene cada pieza?

5.4 ●● Un rodapié recorre un rincón de **120°**. ¿A qué ángulo se corta cada pieza?

5.5 ●●● Mesa hexagonal de **900** mm entre caras. ¿Cuánto mide el lado? ¿Y entre vértices? ¿Qué tablero rectangular mínimo necesitas para sacarla?

6 Arcos: cuerda, flecha y radio

Un cabecero con el borde curvo, un faldón con un arco rebajado, una puerta de medio punto… En el plano suelen venir dos medidas fáciles de tomar: la **cuerda c** (el ancho del arco) y la **flecha f** (lo que sube el arco en el centro). Para trazarlo con el compás de vara o programarlo en la CNC necesitamos el **radio R**.



El triángulo verde: hipotenusa R, catetos c / 2 y R − f.

6.1 El radio a partir de la cuerda y la flecha

En el triángulo rectángulo de la figura, la hipotenusa es el radio, un cateto es media cuerda y el otro es el radio menos la flecha. Con Pitágoras:

1. $R^2 = (c / 2)^2 + (R - f)^2$
2. Desarrolla $(R - f)^2 = R^2 - 2Rf + f^2$:
   $R^2 = c^2 / 4 + R^2 - 2Rf + f^2$
3. Los R^2 se van (uno a cada lado). Pasa $2Rf$ a la izquierda:
   $2Rf = c^2 / 4 + f^2$
4. Despeja R dividiendo entre 2f:
   $R = c^2 / (8f) + f / 2$

Cabecero de **1600** de ancho con un arco que sube **150**:

$$R = 1600^2 / (8 \cdot 150) + 150 / 2 = 2133.33 + 75 = \mathbf{2208.3\ mm}$$

6.2 La flecha a partir del radio

Al revés, si conoces el radio y la cuerda, del mismo triángulo:

$$f = R - \sqrt{R^2 - (c / 2)^2}$$

6.3 El ángulo y el largo del arco

Para chapar el canto de una pieza curva hay que saber cuánto mide el arco. Primero el ángulo que abarca, con el seno (media cuerda es el opuesto y R la hipotenusa):

$$\theta = 2 \cdot \text{sen}^{-1}(c / 2R) = 2 \cdot \text{sen}^{-1}(800 / 2208.3) = 42.48°$$
$$\text{largo del arco} = \pi \cdot R \cdot \theta / 180 = \pi \cdot 2208.3 \cdot 42.48 / 180 = \mathbf{1637.2\ mm}$$

> 📏 **Para el taller.** El centro queda a R − f por debajo de la cuerda: con R = 2208.3 y f = 150, a 2058.3 mm. Si no hay sitio para el compás de vara, el arco se puede trazar con un listón flexible apoyado en tres puntos: los dos extremos y el punto más alto.

Ahora tú

6.1 ● Un arco tiene **800** mm de cuerda y **50** mm de flecha. ¿Qué radio tiene?

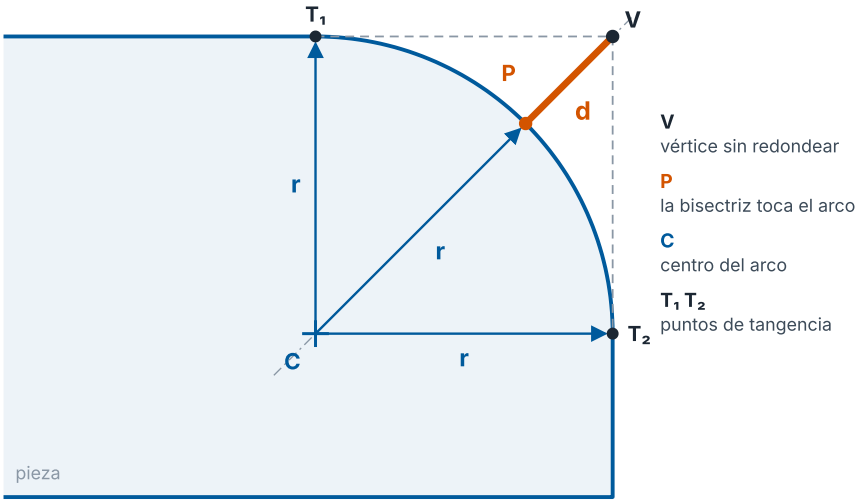
6.2 ●● El faldón de una mesa mide **1200** mm y el arco de abajo sube **60** mm en el centro. ¿Qué radio tiene? ¿A qué distancia de la cuerda está el centro?

6.3 ●● Un arco de radio **500** mm tiene una cuerda de **600** mm. ¿Cuánto mide la flecha?

6.4 ●●● Para chapar el canto del arco del ejercicio 6.1: ¿qué ángulo abarca y qué largo tiene?

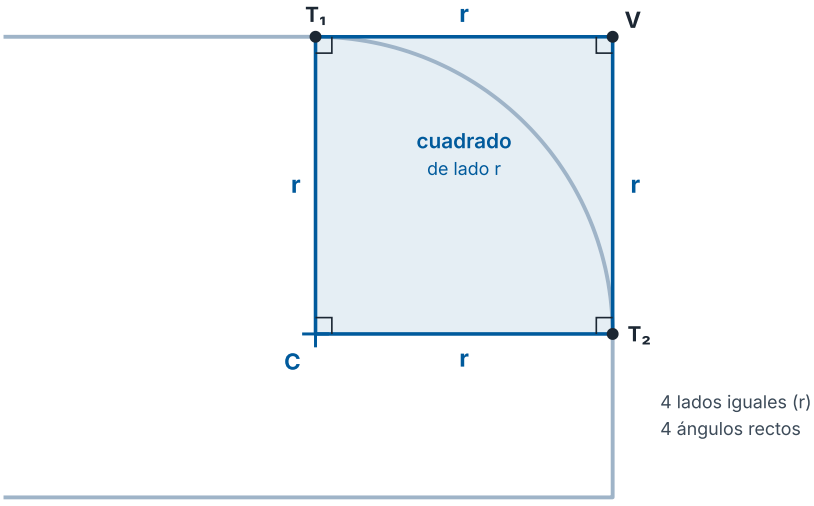
7 El radio de una esquina redondeada

Una pieza tiene una esquina de 90° redondeada y queremos saber el **radio**, para programarlo con `R` o con `I J`. El centro del arco no se puede medir y los puntos donde empieza y acaba no se ven bien. Lo que sí se puede medir es la distancia **d** desde el **vértice V** (donde se cortarían los dos lados sin redondear) hasta el arco, **siguiendo la bisectriz**.



Lo único que se mide es d: del vértice V (donde se cortarían los dos lados sin redondear) hasta el arco, por la bisectriz.

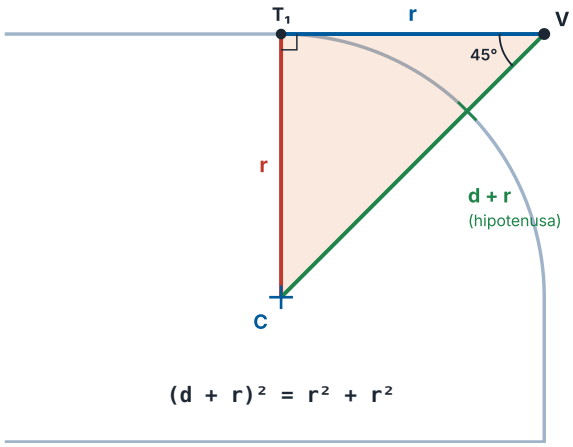
La clave es que el arco es **tangente** a los dos lados: el radio llega a cada lado en ángulo recto. Así, V, T_1, C y T_2 forman un **cuadrado de lado r**.



V, T_1, C y T_2 forman un cuadrado de lado r: el radio llega a cada lado en ángulo recto, y la esquina también es de 90°.

7.1 Tres maneras, el mismo resultado

Manera	De dónde sale	La ecuación
√2	La diagonal del cuadrado, de V a C, mide r · √2, y por partes es d + r	`d + r = r · √2`
Pitágoras	El triángulo V – T_1 – C: catetos r y r, hipotenusa d + r	`(d + r)² = r² + r²`
Tangente	La recta tangente al arco en P forma un triángulo con el ángulo de 22.5° en C	`tan 22.5° = d / r`



El triángulo rectángulo V – T_1 – C: los dos catetos miden r y la hipotenusa, sobre la bisectriz, mide d + r.

De la primera, pasando r a la izquierda y sacando factor común:

```
d = r · √2 − r = r · (√2 − 1)      →      r = d / (√2 − 1) = d · (√2 + 1)
```

Con Pitágoras, si haces la raíz de los dos lados, sale lo mismo: d + r = √(2r²) = r · √2. Y tan 22.5° = 0.41421 es justo √2 − 1, así que la tangente también da la misma fórmula:

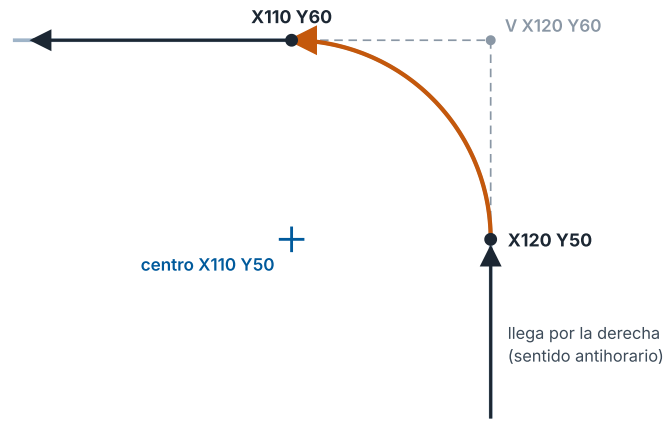
$$r = d \cdot (\sqrt{2} + 1) \approx 2.4142 \cdot d$$

Mides d	2.07	4.14	6.21	8.28	10.36	12.43
Radio r	5	10	15	20	25	30

⚠️ **Los decimales.** Todo error al medir d se multiplica por 2.4 en el radio. Mide con calibre y, si el resultado se queda cerca de un radio normal (R5, R10, R15, R20…), lo más probable es que sea ese.

7.2 En el programa

Con el radio ya tienes los **puntos de tangencia**: están a r del vértice, uno en cada lado. Esquina de arriba a la derecha de una pieza de 120 × 60 con d = 4.142 (R10):



Esquina de arriba a la derecha de una pieza de 120 × 60 con R10: los puntos de tangencia están a 10 mm del vértice.

```
G1 X120 Y50                ; sube por el lado derecho hasta T₂
G3 X110 Y60 R10            ; esquina R10, sentido antihorario
G1 X20 Y60                 ; sigue por el lado de arriba
```

Con I y J: `G3 X110 Y60 I-10 J0` (el centro está 10 mm a la izquierda del punto de inicio).

7.3 ¿Y si la esquina no es de 90°?

El triángulo V – T – C sigue ahí: ángulo recto en T, cateto r, hipotenusa d + r y, en V, la mitad del ángulo de la esquina, θ / 2. Con el **seno**:

$$\sin(\theta/2) = r/(d+r) \quad \rightarrow \quad r = d \cdot \sin(\theta/2) / (1 - \sin(\theta/2))$$

Ángulo de la esquina θ	60°	90°	120°	135°
r / d	1	2.414	6.464	12.137

Los apuntes *Radio de una esquina redondeada* desarrollan las tres maneras paso a paso, con la ecuación de segundo grado que sale de Pitágoras.

Ahora tú

7.1 ● En una esquina de 90° mides **d = 6.213** mm. ¿Qué radio tiene?

7.2 ●● Quieres redondear una esquina de 90° con **R25**. ¿Cuánto tiene que medir d para comprobarlo con el calibre?

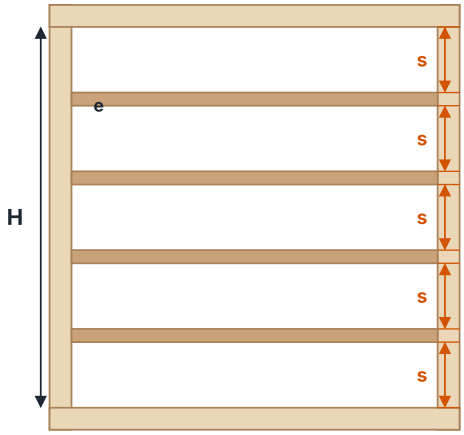
7.3 ●● Pieza de 200 × 100 con el cero en la esquina de abajo a la izquierda. En esa esquina mides **d = 12.426**. ¿Qué radio tiene? ¿Dónde están los puntos de tangencia y el centro?

7.4 ●●● En una esquina de **120°** mides **d = 1.547** mm. ¿Qué radio tiene?

8 Repartos y proporciones

8.1 Repartir huecos iguales

Baldas en un armario, barrotes en una barandilla, listones en un somier: piezas iguales con **huecos iguales**. Si hay **n** piezas de grueso **e** en una luz **H**, y hay hueco también en los dos extremos, salen **n + 1** huecos:



$H = 5 \cdot s + 4 \cdot e$

$s = (H - 4 \cdot e) / 5$

4 baldas → 5 huecos

Cuatro baldas en un armario: cinco huecos iguales.

$$s = (H - n \cdot e) / (n + 1)$$

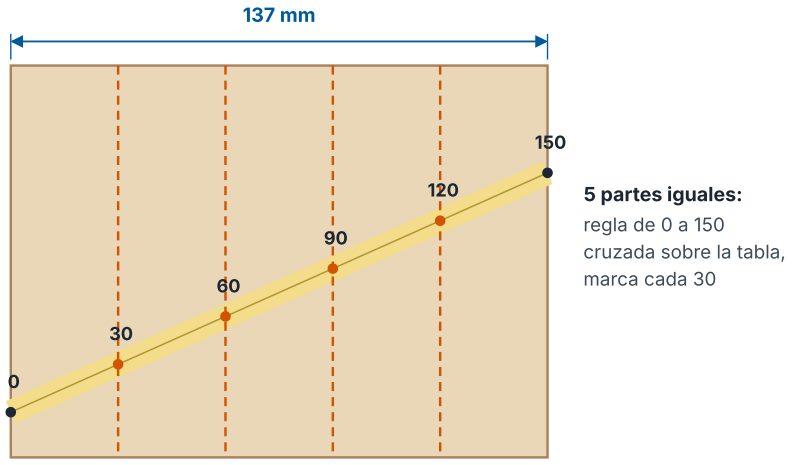
Armario de **1800** de alto por dentro con **4** baldas de **19**:

```
s = (1800 − 4 · 19) / 5 = 1724 / 5 = 344.8 mm
paso (de balda a balda, de cara de arriba a cara de arriba) = 344.8 + 19 = 363.8 mm
```

📏 **Para el taller.** Marca siempre **acumulando** el paso desde el mismo origen (344.8, 708.6, 1072.4…), no midiendo cada hueco desde la marca anterior: así el error no se va sumando.

8.2 Dividir una tabla sin hacer cuentas

Para partir una tabla de 137 mm en 5 tiras iguales, 137 / 5 = 27.4: difícil de marcar. El truco (el **teorema de Tales**): cruza la regla en diagonal sobre la tabla hasta que el 0 y un número fácil de dividir entre 5 (150) toquen los dos cantos. Marca cada 30 y traza paralelas a los cantos.



Las marcas de la regla inclinada reparten el ancho de la tabla en partes iguales.

8.3 La escala del plano

En un plano a escala 1:20, cada milímetro del papel son 20 mm de verdad. Una cota que mide 43 mm en el papel son 43 · 20 = **860 mm**. Al revés, para dibujar 860 mm a 1:20: 860 / 20 = 43 mm. Mejor que medir el plano con regla es leer la cota: medir solo sirve para comprobar.

Ahora tú

8.1 ● Una barandilla tiene **1500** mm libres entre postes. Lleva **13** barrotes de **30** mm. ¿Qué hueco queda entre barrotes?

8.2 ●● En la misma barandilla, los huecos no pueden pasar de **100** mm (para que no quepa la cabeza de un niño). ¿Cuántos barrotes de 30 mm hacen falta como mínimo? ¿Qué hueco queda?

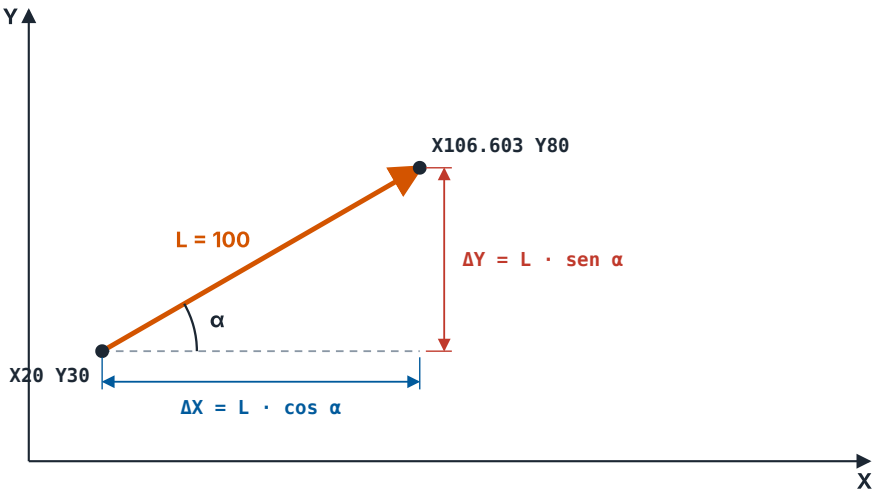
8.3 ● En un plano a escala **1:20**, una pieza mide **37** mm. ¿Cuánto mide de verdad?

8.4 ●● Quieres partir una tabla de **143** mm en **6** tiras iguales con la regla cruzada. ¿Qué número de la regla pones en el otro canto y cada cuánto marcas? ¿Cuánto mide cada tira?

8.5 ●●● Una cajonera tiene un hueco de **720** mm de alto para **4** frentes de cajón iguales. Entre frentes, y arriba y abajo, hay que dejar una holgura de **3** mm. ¿Qué alto tiene cada frente?

9 Del taller a la CNC

En el plano, una recta inclinada puede venir acotada por su **largo y su ángulo**. Para el G-code necesitamos las **coordenadas del punto final**, es decir, cuánto avanza en X y cuánto en Y: los dos catetos.



Recta de 100 mm a 30° desde X20 Y30: los incrementos ΔX y ΔY son los catetos.

$$\Delta X = L \cdot \cos \alpha \qquad \Delta Y = L \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$\Delta X = 100 \cdot \cos 30° = 86.603 \qquad \Delta Y = 100 \cdot \operatorname{sen} 30° = 50$$

```
; en absolutas (G90): punto de inicio + incrementos
G90 G1 X106.603 Y80
; en incrementales (G91): directamente los incrementos
G91 G1 X86.603 Y50
```

Y al revés: si tienes los dos puntos, el largo y el ángulo salen con Pitágoras y la tangente.

$$L = \sqrt{(\Delta X^2 + \Delta Y^2)} \qquad \alpha = \tan^{-1}(\Delta Y / \Delta X)$$

⚠️ **Los signos.** Si la recta va hacia la izquierda o hacia abajo, el incremento es negativo. Haz el dibujo y pon el signo a mano: ΔX es negativo si va hacia la izquierda; ΔY, si va hacia abajo.

💡 **Decimales.** En el G-code se trabaja con tres decimales (la milésima). Usa todos los decimales de la calculadora y redondea al escribir la línea.

Ahora tú

9.1 ● Desde **X0 Y0**, una recta de **80** mm a **45°**. ¿Cuál es el punto final?

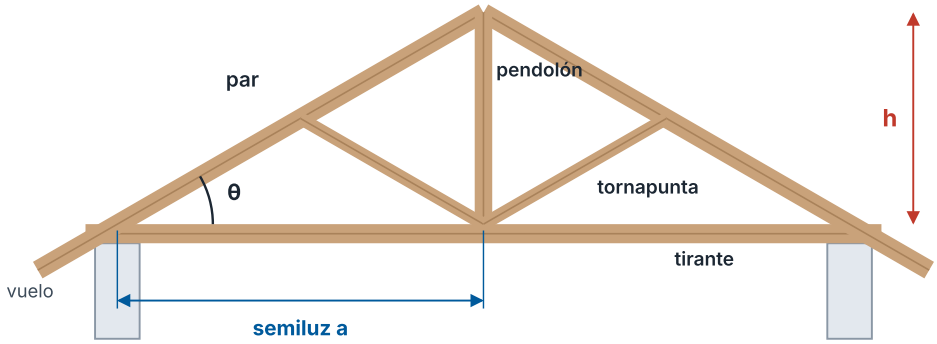
9.2 ●● Desde **X50 Y20**, una recta de **120** mm a **60°**. Escribe la línea en G90 y en G91.

9.3 ●● Un chaflán a 45° tiene **20** mm de cara (la hipotenusa). ¿Cuánto quita en cada lado?

9.4 ●●● Una recta va de **X10 Y10** a **X90 Y70**. ¿Qué largo y qué ángulo tiene?

10 Cubiertas y cerchas

En una cubierta a dos aguas, cada **par** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo: el cateto horizontal es la **semiluz a** (la mitad de la distancia entre apoyos) y el vertical, la **altura h** de la cumbrera sobre los apoyos. La pendiente se da en % o en grados (θ).



Cercha de pendolón: pares, tirante, pendolón y tornapuntas. Todas las medidas salen del triángulo a – h – par.

> ⚠️ **Medidas de ejes.** Las cuentas de este capítulo dan medidas entre ejes de las piezas. En el taller hay que descontar gruesos, embarbillados y ensambles. Y la escuadría de las piezas (su sección) no sale de estas cuentas: es cálculo de estructuras (CTE DB SE-M).

10.1 El par

```
h = a · tan θ      par = √(a² + h²) = a / cos θ      con vuelo v (en horizontal): par = (a + v) / cos θ
```

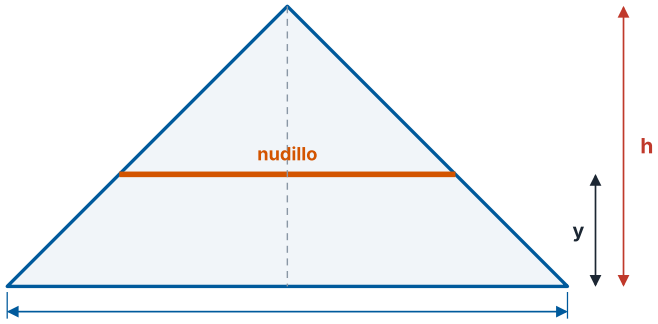
Cubierta de **6000** de luz con pendiente del **30 %** y vuelo de 500:

```
a = 3000      h = 3000 · 0.30 = 900 mm      θ = tan⁻¹ 0.30 = 16.7°
par entre apoyo y cumbrera = √(3000² + 900²) = 3132.1 mm
par con vuelo = (3000 + 500) / cos 16.7° = 3654.1 mm
```

Los cortes de cumbrera (vertical) y de asiento (horizontal) se marcan con la falsa escuadra: el corte vertical forma con el canto del par un ángulo de **90° – θ**, y el horizontal, un ángulo θ.

10.2 Piezas de la cercha: semejanza

Todos los triángulos que se forman dentro de la cercha son **semejantes** al grande (tienen los mismos ángulos), así que sus lados son proporcionales. El punto medio del par está a media altura y a media semiluz. Un **nudillo** (la pieza horizontal que une los dos pares a una altura y) mide:



Por semejanza: a la altura y, el ancho entre pares es proporcional a lo que falta hasta la cumbrera (h – y).

`nudillo = 2a · (h – y) / h` con a = 3000, h = 900 e y = 600: 6000 · 300 / 900 = **2000 mm**

Una **tornapunta** que va del pie del pendolón (centro del tirante) al punto medio del par sube h / 2 y avanza a / 2: mide la mitad del par, 1566 mm en el ejemplo. Para cualquier otra pieza, el método es el de la CNC: coordenadas de sus dos extremos, Pitágoras y tangente.

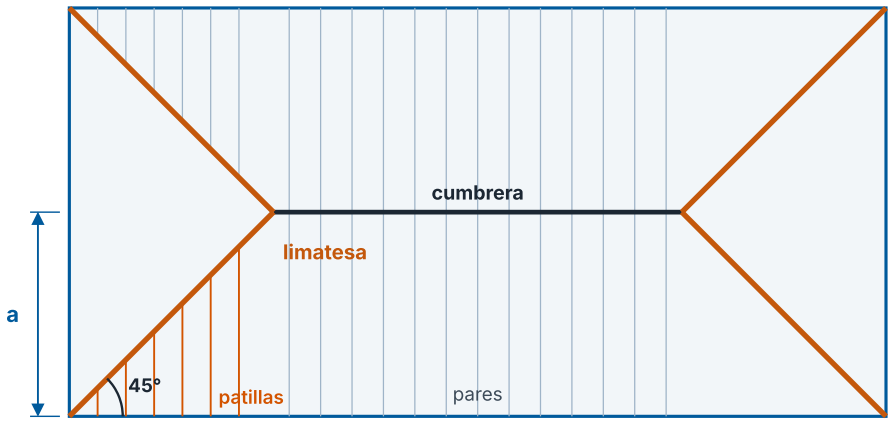
10.3 Cuántas cerchas

Con cerchas a una separación s en una cubierta de largo L hay L / s espacios y una cercha más que espacios:

`n = L / s + 1` (redondeando hacia arriba L / s) L = 7200, s = 600: 12 + 1 = **13 cerchas**

10.4 Cubierta a cuatro aguas: limatesas y patillas

Donde se encuentran dos faldones de la misma pendiente, la **limatesa** va a 45° en planta. Mientras un par común avanza a, la lima avanza la diagonal del cuadrado de lado a: **a · √2**. Sube lo mismo, h.



planta: la lima recorre a · √2 en horizontal

Planta de una cubierta a cuatro aguas: las limas van a 45° y las patillas acortan de una en una.

```
lima = √((a · √2)² + h²) = √(2a² + h²)
pendiente de la lima:  φ = tan⁻¹(h / (a · √2))
rebaje de los cantos de la lima:  tan b = sen φ
cada patilla es más corta que la anterior en  s / cos θ
```

Con la cubierta del ejemplo (a = 3000, h = 900) y patillas cada 600:

```
lima = √(2 · 3000² + 900²) = √18 810 000.0 = 4337 mm
φ = tan⁻¹(900 / 4242.6) = 11.98°      rebaje b = tan⁻¹(sen 11.98°) = 11.72°
diferencia entre patillas = 600 / cos 16.7° = 626.4 mm
```

> 💡 **La lima es más tendida que el par.** Recorre más en horizontal (√2 veces) para subir lo mismo: 12° frente a los 16.7° del faldón. El rebaje b es el bisel que se da a los dos cantos de arriba de la lima para que queden en el plano de cada faldón. Una **limahoya** (el encuentro hacia dentro) se calcula igual.

Ahora tú

10.1 ● Una cubierta a dos aguas tiene **5000** mm de luz y una pendiente del **35 %**. ¿Qué altura tiene la cumbrera, qué ángulo θ y qué largo tiene el par entre el apoyo y la cumbrera?

10.2 ● ¿Cuántas cerchas hacen falta para una cubierta de **9000** mm de largo con cerchas cada **700** mm?

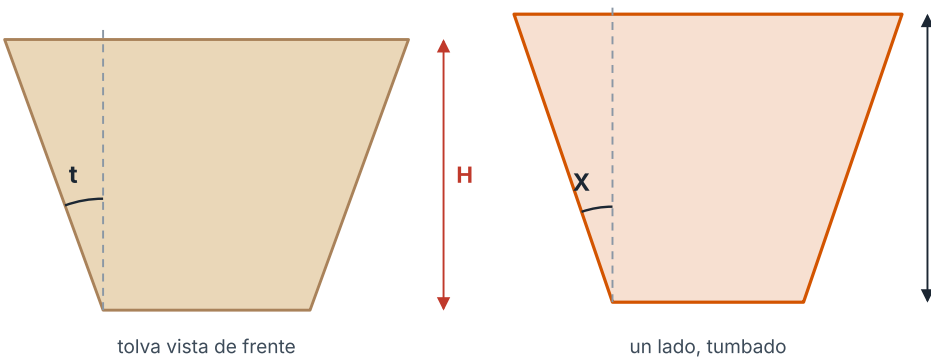
10.3 ●● Cubierta de **7200** mm de luz a **25°** con un vuelo de **400** mm en horizontal. ¿Qué largo total tiene el par? ¿Qué ángulo forma el corte de cumbrera con el canto del par?

10.4 ●● Una cubierta de par y nudillo tiene **6000** mm de luz y la cumbrera a **1500** mm. ¿Qué largo tiene un nudillo colocado a **1000** mm de altura?

10.5 ●●● Cubierta a cuatro aguas: semiluz **2500** mm, pendiente del **40 %**, patillas cada **500** mm. Calcula la altura, el largo de la limatesa, su pendiente, el rebaje de sus cantos y cuánto se acorta cada patilla.

11 Ingletes compuestos

Una tolva, una maceta o una caja con los lados abiertos hacia fuera llevan **ingletes compuestos**: el corte va girado en la mesa de la ingletadora y, a la vez, con la hoja inclinada. Ninguno de los dos ángulos es 180° / n ni el ángulo de los lados: hay que calcularlos.



Tolva de lados inclinados t respecto a la vertical. Al tumbar un lado se ve que su canto no va a escuadra: el corte en la mesa es X.

Con **n** lados iguales, inclinados un ángulo **t** respecto a la vertical (t = 0 es una caja recta y t = 90°, un marco plano):

$$\text{giro de la mesa:}\quad X = \tan^{-1}(\operatorname{sen} t \cdot \tan(180° / n))$$

$$\text{inclinación de la hoja:}\quad Y = \operatorname{sen}^{-1}(\cos t \cdot \operatorname{sen}(180° / n))$$

Se corta con la tabla tumbada sobre su cara y el canto contra el tope. X se mide desde el corte a escuadra y Y desde la hoja vertical.

> 💡 **Comprueba los extremos.** Con t = 0 (caja recta): X = 0 y Y = 180° / n, el bisel de siempre (45° en una caja cuadrada). Con t = 90° (marco plano): X = 180° / n y Y = 0, el inglete del capítulo 5. Las fórmulas pasan de un caso al otro.

Lados \ t	10°	15°	20°	25°	30°	45°
4	9.9° / 44.1°	14.5° / 43.1°	18.9° / 41.6°	22.9° / 39.9°	26.6° / 37.8°	35.3° / 30°
6	5.7° / 29.5°	8.5° / 28.9°	11.2° / 28°	13.7° / 26.9°	16.1° / 25.7°	22.2° / 20.7°
8	4.1° / 22.1°	6.1° / 21.7°	8.1° / 21.1°	9.9° / 20.3°	11.7° / 19.4°	16.3° / 15.7°

En cada casilla: giro de la mesa X / inclinación de la hoja Y.

11.1 Las tablas de los lados

Si la tolva tiene una altura vertical **H**, cada lado es más ancho que H, y la boca de arriba crece por cada lado:

```
ancho de la tabla = H / cos t      cada lado se abre arriba  H · tan t
los cantos de arriba y de abajo se biselan a t para que apoyen planos
```

Maceta cuadrada de **300** de alto con los lados a **15°**:

```
X = tan⁻¹(sen 15° · tan 45°) = tan⁻¹ 0.2588 = 14.51°
Y = sen⁻¹(cos 15° · sen 45°) = sen⁻¹ 0.683 = 43.08°
ancho de tabla = 300 / cos 15° = 310.6 mm      se abre 80.4 mm por cada lado
```

> ⚠️ **Prueba antes.** Un error de medio grado en cada uno de los 8 cortes de una caja cuadrada abre la última junta. Corta primero dos recortes, júntalos y comprueba. Y fíjate en cómo marca tu máquina la inclinación de la hoja: casi todas, desde la vertical, como aquí.

Ahora tú

11.1 ● Una tolva cuadrada tiene los lados inclinados **30°** respecto a la vertical. ¿A qué ángulo se gira la mesa y a cuánto se inclina la hoja?

11.2 ●● Una maceta **hexagonal** tiene los lados a **20°** de la vertical. Calcula X y Y.

11.3 ●● Un marco de espejo **octogonal** no es plano: puesto boca abajo sobre la mesa, cada pieza forma **30°** con la mesa. Es decir, como en una tolva muy abierta, t = **60°** respecto a la vertical. Calcula X y Y.

11.4 ●●● Tolva cuadrada de **250** mm de alto, lados a **25°** y boca de abajo de **200** mm. ¿Qué ancho tienen las tablas? ¿Qué mide la boca de arriba? ¿Qué X y Y llevan los cortes?

12 Arcos de carpintería

En el capítulo 6 vimos el arco de un solo centro a partir de la cuerda y la flecha. Puertas, cabeceros, cimbras y celosías usan otros arcos, con dos o más centros. Todos se calculan con lo mismo: triángulos rectángulos entre los centros y los puntos del arco.

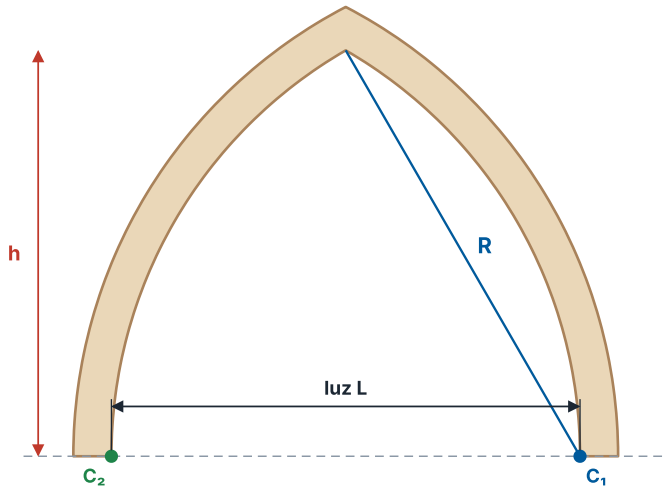
Arco	Centros	Cómo es
Medio punto	1	Semicírculo: R = L / 2.
Rebajado	1	El centro queda por debajo de los arranques (capítulo 6).
Escarzano	1	Rebajado en el que el centro y los dos arranques forman un triángulo equilátero: R = L.
Ojival o apuntado	2	Dos arcos que se cortan en punta; los centros, en la línea de arranque.
Carpanel	3 (o 5)	Arco rebajado y suave, sin punta: dos arcos pequeños en los arranques y uno grande arriba.
Elíptico	—	Media elipse; se traza con dos clavos y una cuerda.

12.1 Arco escarzano

El centro forma un triángulo equilátero con los dos arranques: **R = L** y el arco abarca 60°. La flecha es el radio menos la altura del triángulo:

$$f = L - L \cdot \cos 30° = L \cdot (1 - 0.866) = 0.134 \cdot L \qquad \text{con } L = 900\text{:}\quad f = \mathbf{120.6\ mm}$$

12.2 Arco ojival



Ojival equilátero: cada arco tiene su centro en el arranque contrario (R = L). La punta está a h = 0.866 · L.

El arco de la izquierda tiene su centro C_1 en la línea de arranque, a R del arranque izquierdo; el de la derecha, al revés. En el **ojival equilátero**, R = L y cada centro cae en el arranque contrario: la punta forma un triángulo equilátero con los arranques.

```
ojival equilátero:  R = L      h = L · √3 / 2 = 0.866 · L
```

Si se quiere una altura h concreta, del triángulo C_1 – centro de la luz – punta (catetos R − L/2 y h, hipotenusa R):

1. $R^2 = (R - L/2)^2 + h^2$
2. Desarrolla: $R^2 = R^2 - R \cdot L + L^2/4 + h^2$. Los R^2 se van:

   $R \cdot L = h^2 + L^2 / 4 \quad \rightarrow \quad R = (h^2 + L^2 / 4) / L$
3. Cada arco abarca, desde su centro:

   $\beta = \cos^{-1}((R - L/2) / R)$ largo de cada arco $= \pi \cdot R \cdot \beta / 180$

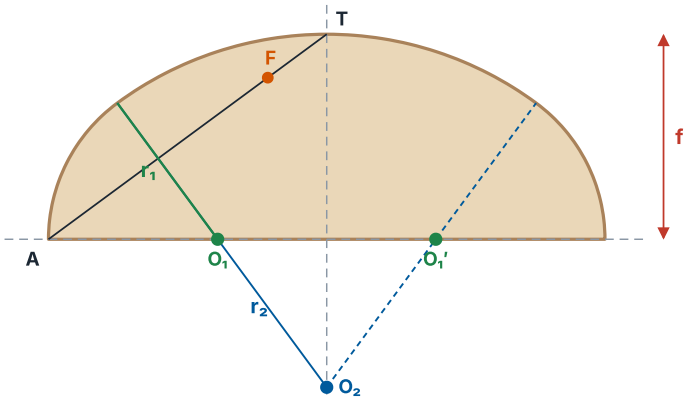
Puerta ojival de **900** de luz con la punta a **1000** sobre los arranques:

```
R = (1000² + 900² / 4) / 900 = (1 000 000 + 202 500) / 900 = 1336.1 mm
los centros están a 1336.1 de cada arranque, es decir, 436.1 mm por fuera de la luz
β = cos⁻¹(886.1 / 1336.1) = 48.46°      cada arco: π · 1336.1 · 48.46 / 180 = 1130 mm
```

Con h > 0.866 · L sale R > L (ojival más apuntado, de lanceta) y con h < 0.866 · L, R < L (ojival rebajado).

12.3 Arco carpanel de tres centros

Para una luz L y una flecha f menor que L / 2 (un arco más bajo que el de medio punto, pero sin el quiebro del rebajado):



Carpanel de tres centros: dos arcos pequeños (centros O_1 y O_1') y uno grande (centro O_2). Se unen sin escalón en la recta $O_2 - O_1$.

1. Une el arranque A con la clave T. Esa recta mide

   ```
   k = √(a² + f²)        (a = L / 2)
   ```

2. Sobre AT, desde T, marca F a una distancia d = a − f (lo que le falta a la flecha para ser un medio punto).

3. La mediatriz de AF corta la línea de arranque en **O_1** y el eje en **O_2**. Con las cuentas:

   ```
   r₁ = k · (k − d) / (2a)
   ```

4. O_2 está a una distancia y por debajo de los arranques. Como los arcos son tangentes, $O_2 - O_1$ mide $r_2 - r_1$, y con Pitágoras en el triángulo $O_2 - O - O_1$:

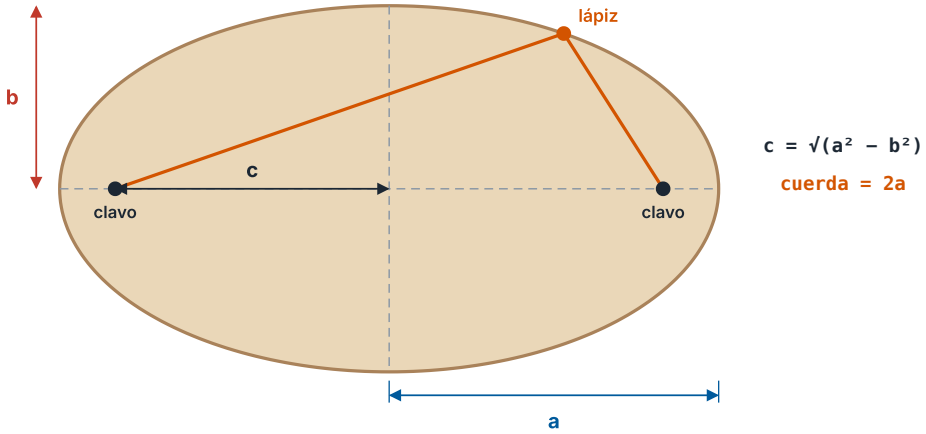
   ```
   y = ((a − r₁)² − (f − r₁)²) / (2 · (f − r₁))        r₂ = f + y
   ```

Cabecero de **1200** de luz con **400** de flecha:

```
a = 600        k = √(600² + 400²) = 721.11        d = 600 − 400 = 200
r₁ = 721.11 · 521.11 / 1200 = 313.1 mm
y = (286.85² − 86.85²) / (2 · 86.85) = 430.3 mm        r₂ = 400 + 430.3 = 830.3 mm
```

12.4 Elipse: mesas ovaladas

Una mesa ovalada de largo 2a y ancho 2b se traza con el **método del jardinero**: dos clavos en los focos, una cuerda cerrada (o atada a los clavos) de largo 2a, y el lápiz tensando la cuerda.



La suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los dos focos es siempre 2a.

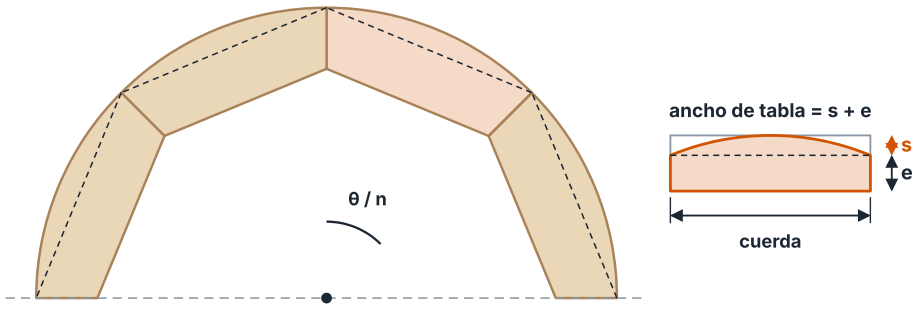
```
distancia del centro a cada clavo:  c = √(a² − b²)      cuerda entre clavos y lápiz:  2a
perímetro aproximado (para el canto):  π · [3(a + b) − √((3a + b)(a + 3b))]
```

Mesa de **1800 × 1000**: a = 900, b = 500.

```
c = √(900² − 500²) = √560 000 = 748.3 mm      cuerda = 1800 mm
perímetro ≈ π · [3 · 1400 − √(3200 · 2400)] = 4488.5 mm de canto
```

12.5 Cimbras de segmentos

Una cimbra (o una costilla curva) se hace con tablas cortadas en curva y unidas a tope. Con radio R, un arco de θ grados y n segmentos iguales:



Cada segmento se saca de una tabla recta: su ancho es la flecha del segmento más el canto que se deja por debajo.

```
ángulo de cada segmento = θ / n      cuerda = 2R · sen(θ / 2n)
flecha del segmento:  s = R · (1 − cos(θ / 2n))      ancho de tabla = s + e
las juntas van a θ / 2n
```

Cimbra de medio punto de R = 600 en 4 segmentos, dejando e = 50 mm:

```
cada segmento: 180° / 4 = 45°      cuerda = 2 · 600 · sen 22.5° = 459.2 mm
s = 600 · (1 − cos 22.5°) = 45.7 mm      ancho de tabla = 45.7 + 50 = 95.7 mm
```

Ahora tú

12.1 ● Un arco ojival equilátero tiene **800** mm de luz. ¿Qué radio tiene y a qué altura queda la punta?

12.2 ● Un arco escarzano tiene **1000** mm de luz. ¿Qué radio y qué flecha tiene?

12.3 ●● Una ventana ojival tiene **1000** mm de luz y la punta a **1100** mm de los arranques. ¿Qué radio tiene cada arco? ¿Qué ángulo abarca cada uno?

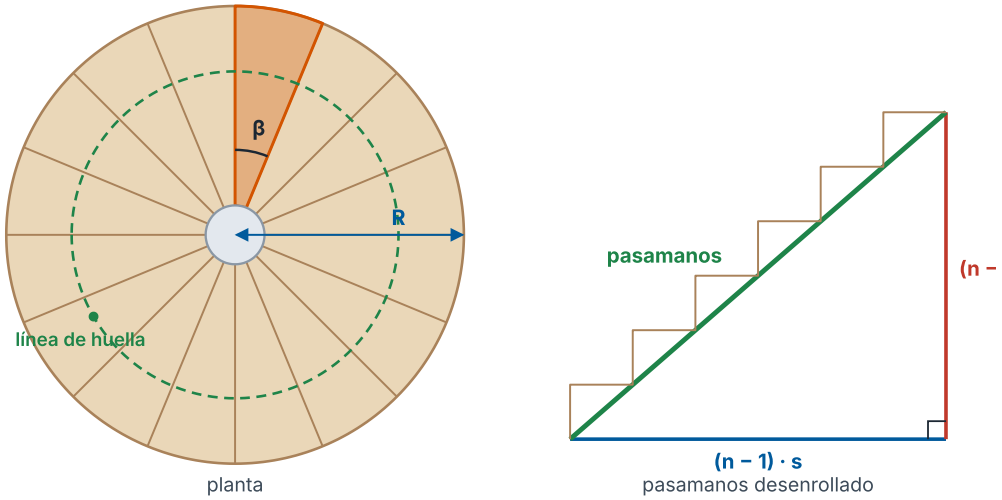
12.4 ●● Vas a trazar un tablero ovalado de **1600 × 900** mm con el método del jardinero. ¿A qué distancia del centro clavas los clavos? ¿Qué largo tiene la cuerda?

12.5 ●●● Calcula los radios de un arco carpanel de tres centros de **1400** mm de luz y **450** mm de flecha.

12.6 ●●● Una cimbra de arco rebajado tiene **R = 1500** mm y abarca **60°**. Se hace en **3** segmentos dejando **40** mm de canto. ¿Qué cuerda tiene cada segmento y qué ancho de tabla hace falta?

13 Escaleras de caracol

Una escalera de caracol gira alrededor de un mástil. Cada peldaño es una cuña que abarca un ángulo **β**, y su huella cambia según dónde se mida: estrecha junto al mástil y ancha en el borde. Por eso la huella se mide en la **línea de huella**, un círculo a una distancia fija del centro, por donde se camina.



Planta con los peldaños en abanico y la línea de huella; a la derecha, el pasamanos desenrollado: un triángulo rectángulo.

13.1 Contrahuella, huella y giro

```
c = H / n      giro total = (n − 1) · β
huella en la línea de huella (un arco):  h = 2π · Rₕ · β / 360
```

Escalera de **2700** de altura con **15** contrahuellas, peldaños de **22.5°** (16 por vuelta), radio exterior 900, mástil de 100 y línea de huella a **650** del centro:

```
c = 2700 / 15 = 180 mm      giro total = 14 · 22.5° = 315°
h = 2π · 650 · 22.5 / 360 = 255.3 mm      Blondel: 2 · 180 + 255.3 = 615.3 ✓
ancho del peldaño en el borde: 2π · 900 · 22.5 / 360 = 353.4 mm      junto al
mástil: 39.3 mm
```

⚠️ **La norma.** El CTE fija a qué distancia del borde se mide la huella en escaleras curvas y qué medidas mínimas debe tener. Las escaleras de caracol con peldaños muy estrechos junto al mástil solo se admiten en algunos usos. Antes de un proyecto real, consulta la versión vigente.

13.2 El pasamanos: una hélice

El pasamanos sube enrollado alrededor del eje: es una **hélice**. Si se desenrolla (como la etiqueta de una lata), cada peldaño es un triángulo rectángulo: avanza el arco s a la altura del pasamanos y sube c. Todo el pasamanos es la hipotenusa del triángulo grande.

```
s = 2π · Rₚ · β / 360        tramo por peldaño = √(s² + c²)
pasamanos = (n − 1) · √(s² + c²)        inclinación = tan⁻¹(c / s)
```

Con el pasamanos a **880** del centro:

```
s = 2π · 880 · 22.5 / 360 = 345.6 mm        tramo = √(345.6² + 180²) = 389.6 mm
pasamanos = 14 · 389.6 = 5455 mm        inclinación = tan⁻¹(180 / 345.6) =
27.51°
```

> 💡 **El pasamanos de dentro y el de fuera.** Con el mismo c, cuanto más cerca del mástil, más corto es s y más empinado va el pasamanos. Por eso un pasamanos junto al mástil sube mucho más inclinado que el del borde.

Ahora tú

13.1 ● Una escalera de caracol salva **2520** mm con **14** contrahuellas y peldaños de **24°**. ¿Qué contrahuella tiene? ¿Cuánto gira en total?

13.2 ●● En la misma escalera, la línea de huella está a **600** mm del centro. ¿Qué huella tiene? ¿Cumple la regla de Blondel (600 a 640)?

13.3 ●●● El pasamanos de esa escalera va a **850** mm del centro. ¿Qué largo tiene cada tramo, qué largo tiene el pasamanos completo y con qué inclinación sube?

14 Cubicación y presupuesto

Cubicar es calcular cuánta madera lleva un trabajo. Con eso se pide el material, se calcula el precio y se sabe lo que pesa el mueble.

14.1 El volumen de una pieza

Largo × ancho × grueso. Para que salga en **metros cúbicos**, pasa antes las tres medidas a metros (divide los milímetros entre 1000).

```
tabla de 2500 × 200 × 27 mm:  2.5 · 0.2 · 0.027 = 0.0135 m³
```

> ⚠️ **Los ceros.** 1 m³ son 1 000 000 000 mm³. Si multiplicas en milímetros (2500 · 200 · 27 = 13 500 000 mm³) tienes que dividir entre mil millones. Es más seguro pasar primero a metros.

14.2 La lista de piezas y la merma

Se suma el volumen de todas las piezas (el volumen **neto**) y se añade la **merma**: lo que se pierde en cortes, defectos, nudos y en sacar las piezas de tablas de medidas comerciales. Suele estar entre un 15 y un 30 %, según la madera y el trabajo.

Pieza	Cantidad	Medidas (mm)	Volumen (m³)
Costado	2	1800 × 300 × 27	0.02916
Balda	5	800 × 300 × 27	0.0324
Total neto			**0.06156**

```
con un 20 % de merma:  0.06156 · 1.20 = 0.0739 m³
a 650 €/m³:  0.0739 · 650 = 48.02 € de madera
```

14.3 Tableros y cantos

Los tableros se calculan por **superficie** (m²) y los cantos por **metros lineales**. Para saber cuántos tableros hacen falta, lo exacto es hacer el despiece (a mano o con un programa de despiece); para una primera estimación, superficie de las piezas × (1 + merma) / superficie del tablero, redondeando hacia arriba.

```
6 baldas de 800 × 300 con canto en un largo:  6 · 0.8 = 4.8 m de canto
con un 10 % de más para los cortes:  4.8 · 1.10 = 5.28 m
```

14.4 Peso

Peso = volumen × densidad. La densidad cambia mucho con la especie y la humedad: el pino ronda los 500 kg/m³ y el roble, los 700 (valores aproximados; para un trabajo concreto, consulta la ficha de la madera).

```
la estantería de pino:  0.06156 · 500 ≈ 30.8 kg
```

14.5 El presupuesto

1. **Materiales:** madera con merma, tableros, cantos, herrajes, acabado.
2. **Mano de obra:** horas × precio por hora.
3. **Base:** la suma de los dos.
4. **IVA:** el 21 % de la base. Total = base · 1.21.

```
materiales 120 € + herrajes 25 € + 5 h · 30 €/h = 295 € de base
IVA: 295 · 0.21 = 61.95 €      total = 295 · 1.21 = 356.95 €
```

> 💡 **Porcentajes de un paso.** Subir un 21 % es multiplicar por 1.21; bajar un 15 %, por 0.85. Y para quitar el IVA de un precio final se **divide** entre 1.21: no se resta el 21 %.

Ahora tú

14.1 ● ¿Qué volumen tiene una tabla de **3000 × 150 × 22** mm, en m^3?

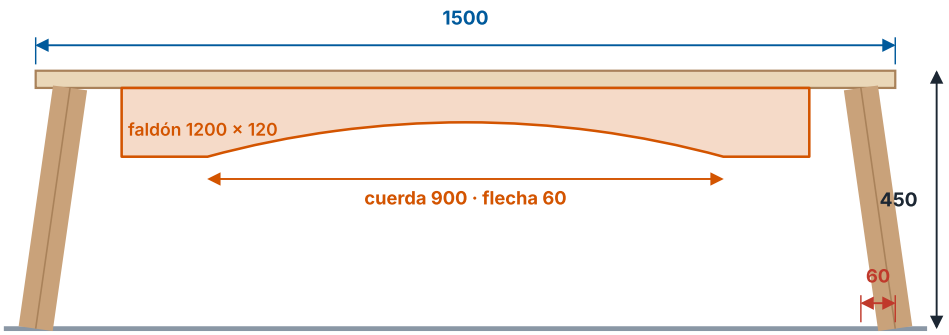
14.2 ●● Una mesa lleva 4 patas de **720 × 70 × 70**, 2 largueros de **1400 × 90 × 27**, 2 travesaños de **700 × 90 × 27** y un tablero macizo de **1500 × 800 × 30**. Calcula el volumen neto y el coste de la madera con un **25 %** de merma a **900 €/m^3**.

14.3 ●● Un trabajo lleva **180 €** de material, **35 €** de herrajes y **6** horas a **28 €/h**. ¿Cuál es la base, el IVA y el total?

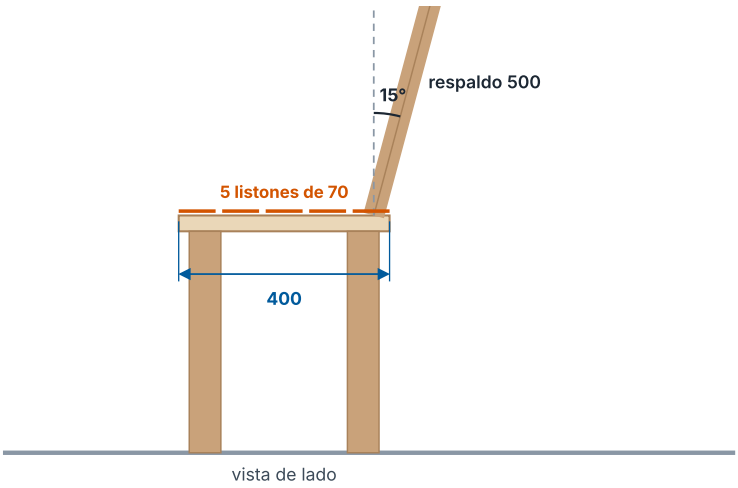
14.4 ●●● Un cliente te dice que paga como máximo **500 €** con IVA. Si el material y los herrajes son **190 €** y cobras **30 €/h**, ¿cuántas horas puedes dedicar como mucho?

15 Proyecto: un banco de jardín

Este capítulo junta varios de los anteriores en un mueble real. Primero calcula tú cada medida con el plano y la lista de tareas; después compara con las soluciones del final. Cada tarea indica de qué capítulo sale.



Vista de frente: asiento de 1500, patas abiertas 60 mm hacia los lados y faldón con arco rebajado.



Vista de lado: asiento de 400 de fondo con 5 listones y respaldo inclinado 15° desde la vertical.

Datos del banco

Parte	Datos
Asiento	1500 × 400 mm, 30 mm de grueso, cara de arriba a 450 mm del suelo. 5 listones de 70 mm, juntos a los bordes y con huecos iguales entre ellos. Las dos esquinas de delante, redondeadas a R20.
Patas	60 × 60 mm. Arriba quedan bajo el asiento; en el suelo se abren 60 mm hacia los lados (en el sentido del largo). De lado, verticales.
Faldones	1200 × 120 × 22 mm, delante y detrás. En el canto de abajo, un arco rebajado de 900 de cuerda y 60 de flecha, centrado.
Respaldo	Dos montantes de 500 × 60 × 40, inclinados 15° desde la vertical, y 3 listones de 1500 × 70 × 22.

Ahora tú

15.1 ● *(cap. 3)* ¿Qué altura vertical tienen las patas, del suelo a la cara de abajo del asiento? ¿A qué ángulo se cortan arriba y abajo? ¿Qué largo tienen?

15.2 ● *(cap. 8)* ¿Qué hueco queda entre los listones del asiento? Ojo: no hay hueco en los bordes.

15.3 ●● *(cap. 6)* ¿Qué radio tiene el arco del faldón? ¿Qué largo tiene (para lijarlo o cantearlo)?

15.4 ●● *(cap. 3)* ¿Cuánto se retrasa la parte de arriba del respaldo? ¿A qué altura del suelo llega?

15.5 ●● *(cap. 7)* Para comprobar con el calibre el R20 de las esquinas del asiento, ¿qué d tienes que medir?

15.6 ●●● *(cap. 9 y G-code)* Con el cero pieza en la esquina de abajo a la izquierda del faldón, escribe las líneas del contorno en sentido antihorario, empezando en X0 Y0, con el arco en `R`.

15.7 ●●● *(cap. 14)* Cubica el banco (patas de 430 de largo, para tener margen) y calcula el coste de la madera con un 20 % de merma a 900 €/m³.

E Errores típicos

Antes de dar por buena una medida, repasa esta lista. Son los fallos que más se repiten.

Error	Ejemplo	Cómo evitarlo
Calculadora en radianes	tan 45 da 1.62 en lugar de 1	Prueba antes: tan 45 = 1. Busca DEG o D en la pantalla.
$\sqrt{(a^2 + b^2)} = a + b$	$\sqrt{(60^2 + 80^2)}$ no es 140, es 100	La hipotenusa es más corta que la suma de los catetos.
Restar al revés en un cateto	$\sqrt{(800^2 - 1000^2)}$: raíz de un número negativo	Siempre hipotenusa² menos cateto².
Seno donde va tangente	sen α = sube / avanza	Mira qué lados intervienen: sin hipotenusa, es tangente.
Ángulo desde la referencia equivocada	Una pata a 6.5° de la vertical cortada a 6.5° de la horizontal	Haz el croquis y marca desde dónde se mide el ángulo.
100 % = 90°	Una pendiente del 100 % es de 45°	% = 100 · tan α.
Redondear a mitad de cálculo	tan 22.5° = 0.4 en lugar de 0.41421	Usa todos los decimales y redondea solo el resultado.
Contar mal los huecos	4 baldas dejan 5 huecos; 5 listones juntos a los bordes, 4	Dibuja las piezas y cuenta los huecos en el dibujo.
Una huella de más	15 contrahuellas, 15 huellas	La última contrahuella llega al piso: n − 1 huellas.
Olvidar el vuelo o los gruesos	El par se queda corto en el alero	Las cuentas dan medidas de ejes; suma vuelos y descuenta gruesos.
Inglete compuesto con 180° / n	Tolva cuadrada cortada a 45° y 45°	Con lados inclinados, X e Y se calculan (capítulo 11).
Restar el IVA	121 € − 21 % = 95.59 €, no 100 €	Para quitar el IVA, divide entre 1.21.
Mezclar unidades	Volumen en mm³ con precio en €/m³	Pasa todo a metros antes de cubicar.

📏 **La comprobación de 10 segundos.** ¿El resultado es razonable si lo comparas con el plano? ¿La hipotenusa es el lado más largo? ¿Los ángulos agudos suman 90°? ¿Has puesto las unidades?

F Formulario

Para	Fórmula
Pitágoras	`c = √(a² + b²)` `a = √(c² − b²)`
Trigonometría	`sen α = op / hip` `cos α = cont / hip` `tan α = op / cont`
Ángulo a partir de los catetos	`α = tan⁻¹(op / cont)`
Pendiente	`% = 100 · tan α` `1:n → α = tan⁻¹(1 / n)`
Escalera	`2c + h ≈ 630` `c = H / n` `recorrido = (n − 1) · h` `α = tan⁻¹(c / h)`
Marco de n lados	`corte = 180° / n` `L ext = L int + 2 · w · tan(corte)`
Esquina de β grados	`corte = (180° − β) / 2`
Polígono entre caras W	`lado = W · tan(180° / n)` `D = W / cos(180° / n)`
Arco	`R = c² / (8f) + f / 2` `f = R − √(R² − (c/2)²)`
Largo de arco	`θ = 2 · sen⁻¹(c / 2R)` `arco = π · R · θ / 180`
Radio de esquina	`90°: r = d · (√2 + 1)` `θ: r = d · sen(θ/2) / (1 − sen(θ/2))`
Reparto	`s = (H − n · e) / (n + 1)`
Recta en la CNC	`ΔX = L · cos α` `ΔY = L · sen α`
Cubierta	`h = a · tan θ` `par = (a + v) / cos θ` `n = L / s + 1`
Nudillo	`2a · (h − y) / h`
Limatesa	`lima = √(2a² + h²)` `φ = tan⁻¹(h / (a√2))` `tan b = sen φ` `patillas: s / cos θ`
Inglete compuesto	`X = tan⁻¹(sen t · tan(180°/n))` `Y = sen⁻¹(cos t · sen(180°/n))` `tabla = H / cos t`
Escarzano	`R = L` `f = 0.134 · L`
Ojival	`R = (h² + L²/4) / L` `equilátero: R = L, h = 0.866 · L`

Carpanel	`k = √(a² + f²)` `r₁ = k(k − d) / 2a` `r₂ = f + y`
Elipse	`c = √(a² − b²)` `cuerda = 2a`
Cimbra	`cuerda = 2R · sen(θ/2n)` `s = R(1 − cos(θ/2n))`
Escalera de caracol	`h = 2π · Rₕ · β / 360` `giro = (n − 1) · β` `pasamanos = (n − 1) · √(s² + c²)`
Cubicación	`V = largo · ancho · grueso (en m)` `con merma: V · (1 + m)` `peso = V · densidad`
Presupuesto	`base = materiales + horas · €/h` `total = base · 1.21` `sin IVA = total / 1.21`

⚠️ **Antes de cortar.** Calculadora en DEG · redondea al final · haz un croquis a mano con los datos · comprueba que la hipotenusa es el lado más largo y que el resultado tiene sentido.

S Soluciones

2 · Pitágoras en el taller

2.1 Es el 3 – 4 – 5 multiplicado por 30.

$$D = \sqrt{(90^2 + 120^2)} = \sqrt{(8100 + 14\ 400)} = \sqrt{22\ 500} = \mathbf{150\ cm}$$

2.2

$$D = \sqrt{(1830^2 + 600^2)} = \sqrt{(3\ 348\ 900 + 360\ 000)} = \sqrt{3\ 708\ 900} = \mathbf{1925.9\ mm}$$

2.3 Buscas un cateto: al cuadrado de la hipotenusa le restas el del otro cateto.

$$b = \sqrt{(1000^2 - 800^2)} = \sqrt{(1\ 000\ 000 - 640\ 000)} = \sqrt{360\ 000} = \mathbf{600\ mm}$$

2.4

$$D = \sqrt{(2100^2 + 580^2)} = \sqrt{4\ 746\ 400} = 2178.6\ \text{mm}$$
$$2178.6 > 2150 \quad \rightarrow \quad \textbf{no se puede levantar}$$

Fondo máximo: la diagonal tiene que ser 2150 como mucho.

$$\text{fondo} = \sqrt{(2150^2 - 2100^2)} = \sqrt{212\ 500} = \mathbf{461\ mm}$$

En la práctica, algo menos, para tener holgura.

2.5 Cada agua cubre la mitad de la luz: 1200 en horizontal y 600 en vertical.

$$\text{par hasta la pared} = \sqrt{(1200^2 + 600^2)} = 1341.64\ \text{mm}$$

El vuelo sigue la misma pendiente: en el mismo triángulo, cada milímetro horizontal son 1.118 mm de par (proporción).

$$\text{vuelo por el par} = 300 \cdot 1341.64 / 1200 = 335.41\ \text{mm}$$
$$\text{largo total} = 1341.64 + 335.41 = \mathbf{1677.1\ mm}$$

También vale: $\sqrt{(1500^2 + 750^2)} = 1677.1$ (1500 en horizontal con el vuelo, y 750 en vertical por la misma pendiente).

3 · Trigonometría

3.1

$$\alpha = \tan^{-1}(1 / 8) = \tan^{-1} 0.125 = \mathbf{7.1°}$$

3.2

$$\text{pendiente} = 100 / 1200 \cdot 100 = \mathbf{8.33\ \%}$$
$$\alpha = \tan^{-1}(100 / 1200) = \mathbf{4.76°}$$

3.3 El tablero es la hipotenusa. La altura es el cateto opuesto a los 15° y lo que ocupa en el suelo, el contiguo.

```
altura = 600 · sen 15° = 600 · 0.2588 = 155.3 mm
en el suelo = 600 · cos 15° = 600 · 0.9659 = 579.6 mm
```

Comprobación: $\sqrt{(155.3^2 + 579.6^2)} = 600$ ✓

3.4

```
tan α = 60 / 450 = 0.1333     α = 7.6° (desde la vertical)
largo = √(450² + 60²) = 454 mm
```

3.5 El respaldo es la hipotenusa y el ángulo se mide desde la vertical: el retraso es el cateto opuesto y la altura, el contiguo.

```
retraso = 900 · sen 12° = 187.1 mm
altura = 900 · cos 12° = 880.3 mm
```

4 · Escaleras

4.1

```
c = 2550 / 15 = 170 mm
h = 630 − 2 · 170 = 290 mm
```

4.2

```
2800 / 175 = 16  →  n = 16
c = 2800 / 16 = 175 mm
h = 630 − 350 = 280 mm
recorrido = 15 · 280 = 4200 mm
α = tan⁻¹(175 / 280) = 32°
```

4.3

```
α = tan⁻¹(180 / 250) = 35.8°
paso = √(250² + 180²) = 308.1 mm
```

4.4

```
15 contrahuellas: c = 180, h = 630 − 360 = 270, recorrido = 14 · 270 =
3780 > 3600  ✗
14 contrahuellas: c = 192.9, h = 630 − 385.7 = 244.3, recorrido = 13 ·
244.3 = 3175.7 ≤ 3600  ✓
```

Cabe con **14 contrahuellas de 192.9 mm** y huellas de 244.3 mm. La contrahuella pasa de 185, así que no vale para uso general; como escalera de uso restringido (dentro de una vivienda: c ≤ 200, h ≥ 220) sí cumple.

5 · Ingletes y polígonos

5.1

```
corte = 180° / 5 = 36°
```

5.2 Marco cuadrado: tan 45° = 1, cada pieza crece 2 · 45 = 90 mm.

```
400 + 90 = 490 mm        300 + 90 = 390 mm
```

5.3

```
L ext = 250 + 2 · 60 · tan 30° = 250 + 120 · 0.5774 = 319.3 mm
```

5.4

```
corte = (180° − 120°) / 2 = 30°
```

5.5

```
lado = 900 · tan 30° = 519.6 mm
entre vértices = 900 / cos 30° = 1039.2 mm
```

Tablero mínimo: **1039.2 × 900 mm** (entre vértices en un sentido, entre caras en el otro), más lo que necesites para el corte.

6 · Arcos

6.1

```
R = 800² / (8 · 50) + 50 / 2 = 1600 + 25 = 1625 mm
```

6.2

```
R = 1200² / (8 · 60) + 60 / 2 = 3000 + 30 = 3030 mm
centro a R − f = 3030 − 60 = 2970 mm de la cuerda
```

6.3

```
f = 500 − √(500² − 300²) = 500 − √160 000 = 500 − 400 = 100 mm
```

6.4

```
θ = 2 · sen⁻¹(400 / 1625) = 28.5°
largo = π · 1625 · 28.5 / 180 = 808.3 mm
```

Algo más que la cuerda (800), como tiene que ser: el arco es un camino más largo.

7 · Radio de una esquina

7.1

```
r = 6.213 · 2.4142 = 15  →  R15
```

7.2

```
d = r · (√2 − 1) = 25 · 0.41421 = 10.355 mm
```

7.3

```
r = 12.426 · 2.4142 = 29.999  →  R30
```

Los puntos de tangencia están a 30 mm del vértice (X0 Y0), uno en cada lado: **X30 Y0** y **X0 Y30**. El centro es la cuarta esquina del cuadrado: **X30 Y30**.

7.4

```
sen(120° / 2) = sen 60° = 0.866
r = 1.547 · 0.866 / (1 − 0.866) = 1.547 · 6.464 = 10 mm  →  R10
```

8 · Repartos

8.1

$$s = (1500 - 13 \cdot 30) / 14 = 1110 / 14 = \mathbf{79.3\ mm}$$

8.2 El hueco tiene que ser como mucho 100: (1500 − 30n) / (n + 1) ≤ 100.

$$1500 - 30n \le 100n + 100 \quad \rightarrow \quad 1400 \le 130n \quad \rightarrow \quad n \ge 10.77$$

$$n = \mathbf{11\ barrotes} \qquad s = (1500 - 330) / 12 = \mathbf{97.5\ mm}$$

8.3

$$37 \cdot 20 = \mathbf{740\ mm}$$

8.4 Necesitas un número mayor que 143 que se divida bien entre 6: el **150** o el **180**. Con 150, marca cada **25** (25, 50, 75, 100, 125); con 180, cada 30.

$$\text{cada tira} = 143 / 6 = \mathbf{23.83\ mm}$$

8.5 4 frentes dejan 5 holguras (3 entre frentes, más arriba y abajo).

$$\text{frente} = (720 - 5 \cdot 3) / 4 = 705 / 4 = \mathbf{176.25\ mm}$$

9 · Del taller a la CNC

9.1

$$\Delta X = \Delta Y = 80 \cdot \cos 45° = 56.569$$

punto final: **X56.569 Y56.569**

9.2

$$\Delta X = 120 \cdot \cos 60° = 60 \qquad \Delta Y = 120 \cdot \operatorname{sen} 60° = 103.923$$

G90: **G1 X110 Y123.923**

G91: **G1 X60 Y103.923**

9.3 La cara del chaflán es la hipotenusa de un triángulo de 45°: los dos catetos son iguales.

$$\text{cateto} = 20 \cdot \cos 45° = 20 / \sqrt{2} = \mathbf{14.142\ mm}$$

9.4

$$\Delta X = 90 - 10 = 80 \qquad \Delta Y = 70 - 10 = 60$$

$$L = \sqrt{(80^2 + 60^2)} = \mathbf{100\ mm}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(60 / 80) = \mathbf{36.87°}$$

10 · Cubiertas y cerchas

10.1

$$a = 2500 \qquad h = 2500 \cdot 0.35 = \mathbf{875\ mm}$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.35 = \mathbf{19.29°}$$

$$\text{par} = \sqrt{(2500^2 + 875^2)} = \mathbf{2648.7\ mm}$$

10.2

9000 / 700 = 12.86 → 13 espacios n = 13 + 1 = **14 cerchas**

10.3

par = (3600 + 400) / cos 25° = 4000 / 0.9063 = **4413.5 mm**
corte de cumbrera con el canto: 90° − 25° = **65°**

10.4

nudillo = 6000 · (1500 − 1000) / 1500 = **2000 mm**

10.5

h = 2500 · 0.40 = **1000 mm** θ = 21.8°
lima = √(2 · 2500² + 1000²) = **3674.2 mm**
φ = tan⁻¹(1000 / 3535.5) = **15.79°**
rebaje b = tan⁻¹(sen 15.79°) = **15.23°**
patillas: 500 / cos 21.8° = **538.5 mm** menos cada una

11 · Ingletes compuestos

11.1

X = tan⁻¹(sen 30° · tan 45°) = tan⁻¹ 0.5 = **26.57°**
Y = sen⁻¹(cos 30° · sen 45°) = sen⁻¹ 0.6124 = **37.76°**

11.2

180° / 6 = 30°
X = tan⁻¹(sen 20° · tan 30°) = **11.17°**
Y = sen⁻¹(cos 20° · sen 30°) = **28.02°**

11.3

180° / 8 = 22.5°
X = tan⁻¹(sen 60° · tan 22.5°) = **19.73°**
Y = sen⁻¹(cos 60° · sen 22.5°) = **11.03°**

Muy cerca de un marco plano: X se acerca a 22.5° y la hoja casi no se inclina.

11.4

ancho de tabla = 250 / cos 25° = **275.8 mm**
boca de arriba = 200 + 2 · 250 · tan 25° = **433.2 mm**
X = **22.91°** Y = **39.86°**

12 · Arcos de carpintería

12.1

R = L = **800 mm** h = 0.866 · 800 = **692.8 mm**

12.2

R = L = **1000 mm**
f = 1000 · (1 − cos 30°) = **134 mm**

12.3

$R = (1100^2 + 1000^2 / 4) / 1000 = (1\,210\,000 + 250\,000) / 1000 = \mathbf{1460\ mm}$
$\beta = \cos^{-1}((1460 - 500) / 1460) = \mathbf{48.89°}$

12.4

$a = 800,\ b = 450 \qquad c = \sqrt{(800^2 - 450^2)} = \mathbf{661.4\ mm}$
cuerda $= 2a = \mathbf{1600\ mm}$

12.5

$a = 700 \qquad k = \sqrt{(700^2 + 450^2)} = 832.17 \qquad d = 250$
$r_1 = 832.17 \cdot 582.17 / 1400 = \mathbf{346\ mm}$
$y = (353.96^2 - 103.96^2) / (2 \cdot 103.96) = 550.6 \qquad r_2 = 450 + 550.6 = \mathbf{1000.6\ mm}$

12.6

cada segmento: $60° / 3 = 20°$
cuerda $= 2 \cdot 1500 \cdot \text{sen } 10° = \mathbf{520.9\ mm}$
$s = 1500 \cdot (1 - \cos 10°) = 22.8$ mm $\qquad$ tabla $= 22.8 + 40 = \mathbf{62.8\ mm}$

13 · Escaleras de caracol

13.1

$c = 2520 / 14 = \mathbf{180\ mm}$
giro $= (14 - 1) \cdot 24° = \mathbf{312°}$

13.2

$h = 2\pi \cdot 600 \cdot 24 / 360 = \mathbf{251.3\ mm}$
$2 \cdot 180 + 251.3 = 611.3 \ \rightarrow\ $ **sí cumple**

13.3

$s = 2\pi \cdot 850 \cdot 24 / 360 = 356$ mm
tramo $= \sqrt{(356^2 + 180^2)} = \mathbf{399\ mm}$
pasamanos $= 13 \cdot 399 = \mathbf{5186.5\ mm}$
inclinación $= \tan^{-1}(180 / 356) = \mathbf{26.82°}$

14 · Cubicación y presupuesto

14.1

$3 \cdot 0.15 \cdot 0.022 = \mathbf{0.0099\ m^3}$

14.2

patas: $4 \cdot 0.72 \cdot 0.07 \cdot 0.07 = 0.01411$
largueros: $2 \cdot 1.4 \cdot 0.09 \cdot 0.027 = 0.0068$
travesaños: $2 \cdot 0.7 \cdot 0.09 \cdot 0.027 = 0.0034$
tablero: $1.5 \cdot 0.8 \cdot 0.03 = 0.036$
neto $= \mathbf{0.06032\ m^3} \qquad$ con merma: $0.06032 \cdot 1.25 = 0.0754\ m^3$
coste $= 0.0754 \cdot 900 = \mathbf{67.86\ €}$

14.3

```
base = 180 + 35 + 6 · 28 = 383 €
IVA = 383 · 0.21 = 80.43 €      total = 463.43 €
```

14.4 Primero quita el IVA dividiendo, y luego resta el material.

```
base máxima = 500 / 1.21 = 413.22 €
para mano de obra: 413.22 − 190 = 223.22 €
horas = 223.22 / 30 = 7.44  →  como mucho 7 horas
```

15 · Proyecto: un banco de jardín

15.1

```
altura = 450 − 30 = 420 mm
α = tan⁻¹(60 / 420) = 8.13° desde la vertical
largo = √(420² + 60²) = 424.3 mm
```

15.2 5 listones juntos a los bordes dejan 4 huecos (n − 1, no n + 1).

```
s = (400 − 5 · 70) / 4 = 50 / 4 = 12.5 mm
```

15.3

```
R = 900² / (8 · 60) + 60 / 2 = 1687.5 + 30 = 1717.5 mm
θ = 2 · sen⁻¹(450 / 1717.5) = 30.38°      largo = π · 1717.5 · 30.38 / 180 = 910.6 mm
```

15.4

```
retraso = 500 · sen 15° = 129.4 mm
altura del montante = 500 · cos 15° = 483 mm      llega a 450 + 483 = 933 mm
```

15.5

```
d = 20 · (√2 − 1) = 8.284 mm
```

15.6 El arco va de X150 a X1050 por el canto de abajo y sube hasta Y60 en el centro: el centro queda por debajo, así que de izquierda a derecha gira en sentido horario (G2).

```
G1 X150 Y0
G2 X1050 Y0 R1717.5       ; arco rebajado del faldón
G1 X1200 Y0
G1 X1200 Y120
G1 X0 Y120
G1 X0 Y0
```

Son las líneas del trazado. Para el programa completo añade la cabecera, la herramienta, la bajada y, si la usas, la compensación de radio.

15.7

Listón de asiento: $5 \cdot 1.5 \cdot 0.07 \cdot 0.03 = 0.01575$
Pata: $4 \cdot 0.43 \cdot 0.06 \cdot 0.06 = 0.00619$
Faldón: $2 \cdot 1.2 \cdot 0.12 \cdot 0.022 = 0.00634$
Montante del respaldo: $2 \cdot 0.5 \cdot 0.06 \cdot 0.04 = 0.0024$
Listón del respaldo: $3 \cdot 1.5 \cdot 0.07 \cdot 0.022 = 0.00693$
neto = **0.03761 m³** con merma: 0.04513 m³
coste = $0.04513 \cdot 900 =$ **40.62 €**